点と直線の距離の公式の求め方

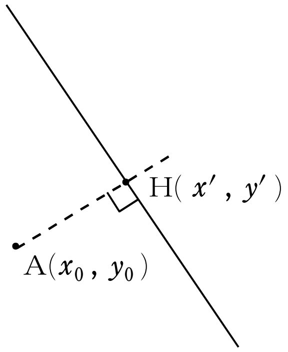
点と直線の距離の公式は，非常に便利でよく使う公式である。しかし，そのまま公式を求めようとすると，文字が多く煩雑で計算力を必要とする。以下に，公式の証明をいくつか紹介する。

問題　点A(x_0 , y_0) と直線l： $ax+by+c=0$ との距離 d を求めよ。

解答

点Aを通り，直線l に垂直な直線g は，$b(x-x_0)-a(y-y_0)=0$

２直線の交点H(x' , y')を計算すると，



$$x'=\frac{b^2x_0-aby_0-ac}{a^2+b^2} \quad , \quad y'=\frac{a^2y_0-abx_0-bc}{a^2+b^2}$$

よって，２点間の距離dの２乗は,

$$d^2=(x'-x_0)^2+(y'-y_0)^2$$

$$=\left\{-\frac{a(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}\right\}^2+\left\{-\frac{b(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}\right\}^2$$

$$=\frac{(ax_0+by_0+c)^2}{a^2+b^2}$$

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

（補足①）直線g ：$b(x-x_0)-a(y-y_0)=0$ のように直線l： $ax+by+c=0$ を変形すると

直線l： $a(x-x_0)+b(y-y_0)=-(ax_0+by_0+c)$

この２直線の式を，$x-x_0$ と $y-y_0$ の連立方程式とみると,

$$x-x_0=-\frac{a(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2} \quad , \quad y-y_0=-\frac{b(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}$$

となり，$d^2=(x'-x_0)^2+(y'-y_0)^2$ を計算すると公式を導くことができる。

（補足②）点Aが原点Oと重なるように全体を平行移動させると，直線l は、

直線l'：$a(x+x_0)+b(y+y_0)+c=0$

となる。原点を通り，直線l' に垂直な直線g' は,

直線g'：$bx-ay=0$

この２直線を連立させて，交点を求めると

$$x=-\frac{a(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2} \quad , \quad y=-\frac{b(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}$$

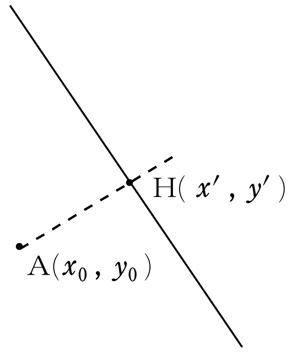
原点から，交点までの距離d の２乗は,

$$d^2=x^2+y^2$$

となり，計算すると公式を導くことができる。

別解1　点A(x_0 , y_0) から直線l： $ax+by+c=0$ へ下した垂線の足をH(x' , y')とする。

直線l の法線ベクトル$\vec{n}$ は，$\vec{n}=(a, b)$ なので，



$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\vec{n}$$

$$(x'-x_0, y'-y_0)=k(a, b)$$

よって，$x'=ka+x_0$ ，$y'=kb+y_0$

H(x' , y') は，直線l 上の点なので，

$$a(ka+x_0)+b(kb+y_0)+c=0$$

$$k=-\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}$$

点A(x_0 , y_0) から直線l： $ax+by+c=0$ までの距離 d は

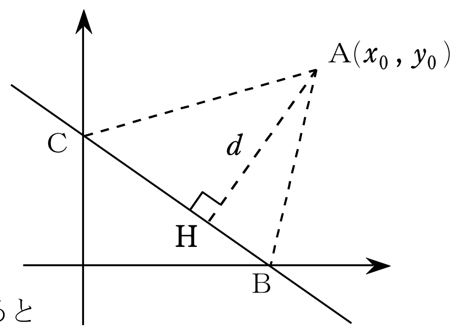
$$d=|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=|k||\vec{n}|$$

$$=\frac{|ax_0+by_0+c|}{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}$$

$$=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

別解2　$a\fallingdotseq 0$, $b\fallingdotseq 0$ とする。直線l： $ax+by+c=0$ とx 軸とy 軸との交点B，Cは、

$$\mathrm{B}\left(-\frac{c}{a}, 0\right),\ \mathrm{C}\left(0, -\frac{c}{b}\right)$$



よって，△ＡＢＣの面積Ｓは，

$$\mathrm{S}=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{c}{a}+x_0\right)\left(\frac{c}{b}+y_0\right)-x_0y_0\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{c}{ab}\right||ax_0+by_0+c|$$

一方，△ＡＢＣの面積Ｓは，底辺をＢＣ，高さＡＨ＝d とすると

$$\mathrm{S}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AH$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left(-\frac{c}{a}\right)^2+\left(-\frac{c}{b}\right)^2}\cdot d$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{c}{ab}\right|\sqrt{a^2+b^2}\cdot d$$

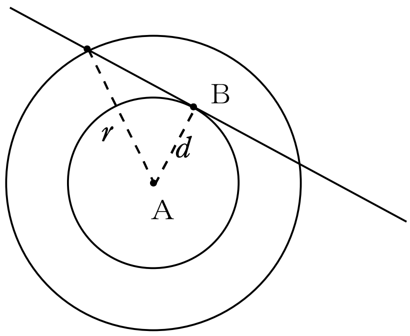
面積は等しいので，$d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

別解 3　点A(x_0 , y_0) を中心とし，半径 r の円周上の点B(x , y) は

$$x=r\cos\theta+x_0 \quad , \quad y=r\sin\theta+y_0$$

と表すことができる。点Bが直線l：$ax+by+c=0$ 上にあるとき，

$$a(r\cos\theta+x_0)+b(r\sin\theta+y_0)+c=0$$



より，

$$r(b\sin\theta+a\cos\theta)=-(ax_0+by_0+c)$$

$$r\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)=-(ax_0+by_0+c)$$

$$|r|\sqrt{a^2+b^2}|\sin(\theta+\alpha)|=|ax_0+by_0+c|$$

$|r|$ が最小になるときd となるので，$|\sin(\theta+\alpha)|=1$

よって，

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

別解 4　$b\fallingdotseq 0$ のとき，直線l：$y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$　この直線を$y=mx+n$ とする。

左図の場合を考える。直線l とx 軸との交点をD，点Aを通り，y 軸に平行な直線が，直線l ，x 軸と交わる点をそれぞれB，Cとする。

x 軸の正方向とのなす角をθ とすると，$m=\tan\theta$

$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より，$|\cos\theta|=\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$

また，△BAH∽△BDCより，∠BAH＝∠BDC

よって，図１の場合，AH＝ABcosθ

　　　　図２の場合，AH＝ABcos$(\pi-\theta)$

より，

$$\text{AH}=|y_0-mx_0-n||\cos\theta|$$

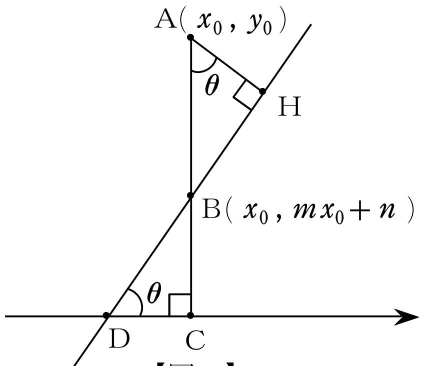
よって，

$$\text{AH}=\frac{|y_0-mx_0-n|}{\sqrt{1+m^2}}$$

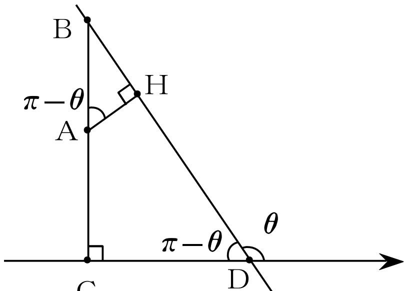
ここで，$m=-\dfrac{a}{b}$ ，$n=-\dfrac{c}{b}$ を代入すると，

$$\text{AH}=\frac{\left|y_0+\dfrac{a}{b}x_0+\dfrac{c}{b}\right|}{\sqrt{1+\left(-\dfrac{a}{b}\right)^2}}$$

$$=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



【図１】



【図２】

$\boxed{\text{別解}}$5　$b \neq 0$ のとき，直線l：$y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$　この直線を$y=mx+n$ とする。

直線上の点B(t , $mt+n$)をとり，点A(x_0 , y_0)との距離の最小値を求める。

$$\begin{aligned}
\mathrm{AB}^2&=(t-x_0)^2+(mt+n-y_0)^2\\
&=(1+m^2)t^2-2(x_0+my_0-mn)t+{x_0}^2+(n-y_0)^2\\
&=(1+m^2)\left\{t-\frac{x_0+my_0-mn}{1+m^2}\right\}^2-\frac{(x_0+my_0-mn)^2}{1+m^2}+\frac{(1+m^2)({x_0}^2+(n-y_0)^2)}{1+m^2}\\
&=(1+m^2)\left\{t-\frac{x_0+my_0-mn}{1+m^2}\right\}^2+\frac{(y_0-mx_0-n)^2}{1+m^2}
\end{aligned}$$

よって，ABの最小値d は,

$$d=\frac{|y_0-mx_0-n|}{\sqrt{1+m^2}}$$

ここで，$m=-\dfrac{a}{b}$ ，$n=-\dfrac{c}{b}$ を代入すると,

$$\begin{aligned}
d&=\frac{\left|y_0+\dfrac{a}{b}x_0+\dfrac{c}{b}\right|}{\sqrt{1+\left(-\dfrac{a}{b}\right)^2}}\\
&=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}
\end{aligned}$$