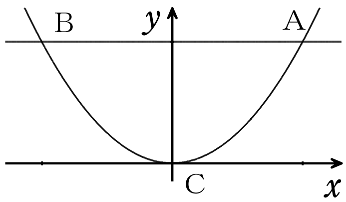
アルキメデスの取り尽くし法

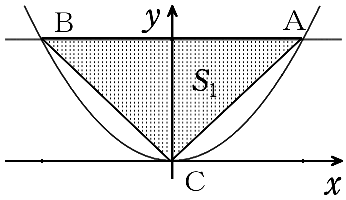
2000年以上前の人間が残したモノの中に今の世の中にも通ずるモノがいくつもあり，その中の一つアルキメデスの「取り尽くし法」が秀逸である。曲線により囲まれた面積を数列を用いて求める方法で，積分の導入に使える。

放物線 $y=x^2\cdots$ ① と直線 $y=1\cdots$ ② で囲まれた図形の面積Sを求めよう。

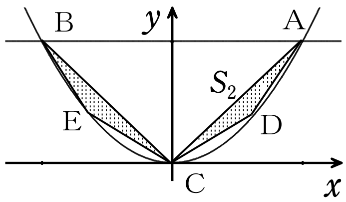


①，②の交点を求めるとA(1,1)，B(−1,1) が得られる。

２点A，Bのx座標 １と−１から，$x=\dfrac{1+(-1)}{2}$ のときの放物線①上の点をＣとし，△ABCの面積を S_1 とすると， $S_1=1$となる。



次に，２点A，Ｃのx座標 １と０から，$x=\dfrac{1+0}{2}$ のときの放物線①上の点をＤ，２点Ｂ，Ｃのx座標 −１と０から，$x=\dfrac{-1+0}{2}$ のときの放物線①上の点をＥとし，△ＡＣＤ，△ＢＣＥの面積の和をS_2とすると，$S_2=\dfrac{1}{4}$ となる。



以下同様に，三角形と放物線①との間に，新しい三角形を作り，面積の和をS_3，S_4，…とすると，

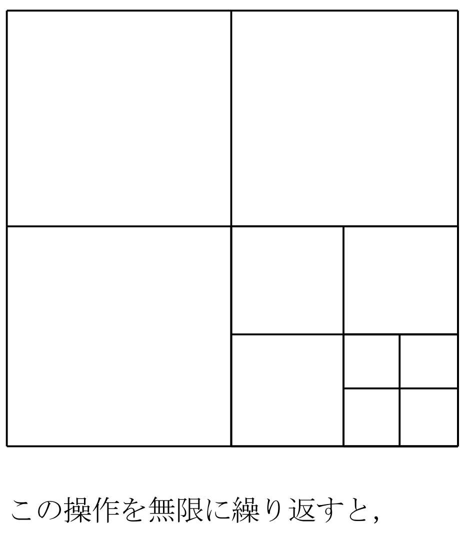
$$S_3=\frac{1}{16}\ ,\ S_4=\frac{1}{64}\ ,\ \cdots$$

となることが分かり，面積の列 S_1，S_2，S_3，S_4，… は，初項１，公比 $\dfrac{1}{4}$ の等比数列になる。

よって，放物線 $y=x^2\cdots$ ① と直線 $y=1\cdots$ ② で囲まれた図形の面積S は

$$S=S_1+S_2+S_3+S_4+\cdots$$
$$=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots \qquad ③$$

この計算は，無限等比級数の和を学習していない段階では，次のような方法で求めることができる。



面積が１の正方形を４等分すると１つの正方形の面積が$\dfrac{1}{4}$となり，４つできた正方形のうち３つの和をとると，和は $\dfrac{3}{4}$ となる。

次に残った１つの正方形を４等分すると１つの正方形の面積が $\dfrac{1}{16}$となり，４つできた正方形のうち３つ和をとると $\dfrac{3}{16}$ となる。

以下同様にこの操作を続けていき，できた正方形の面積の総和をTとすると，

$$T=\frac{3}{4}+\frac{3}{16}+\frac{3}{64}+\cdots$$と表される。

もともと，面積が1の正方形を分割して元の姿に戻しているので，この操作を無限に繰り返すと，$T=1$となる。

よって，曲線により囲まれる図形の面積Sは

$$\begin{aligned} S &= 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots \\ &= 1+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{16}+\frac{3}{64}+\cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\right) \\ &= 1+\frac{1}{3}\cdot T \\ &= 1+\frac{1}{3}\cdot 1 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

となり，①と②により囲まれた図形の面積が $S=\dfrac{4}{3}$ となる。