数列の極限を計算する場合の式変形

極限の計算で，生徒が最初につまずくのは，どんなときに式変形をする必要があるのかというところである。例えば，$\lim_{n\to\infty}\left(n+\sqrt{n^2+n}\right)$の極限はすぐ＋∞と解答していいのに，$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+n}\right)$は式変形をして－１となる。この理由を生徒自身が理解した上で解答できるように指導する必要がある。

そのためには，式変形をしてどの形になったら結論づけてよいかを最初に教えておくことが大切である。

1　式変形することなく極限を求められる場合について

① $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$　は，nを限りなく大きくすると$\frac{1}{\infty}$なり，極限は０になる。

② $\lim_{n\to\infty}(n^2+n)$　は，nを限りなく大きくすると$\infty+\infty$なり，極限は∞になる。

このように$\frac{1}{\infty}$，$\infty+\infty$等の場合，一つの結果が得られるので，式変形することなく極限を求めることができる。

2　不定形について

具体的な例を使って，式変形を必要とする形の説明をする。

① $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n}$，$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}$，$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}$は，$n$を限りなく大きくするといずれも$\frac{\infty}{\infty}$なるが式変形をすると，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(n+\frac{1}{n}\right)=\infty \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=0 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$$

となり，式によって結果が異なることが分かる。つまり，nを限りなく大きくして$\frac{\infty}{\infty}$となる場合は，すぐに結論を出せず，式変形を要することが分かる。

② $\lim_{n\to\infty}(2n^3-n^2)$，$\lim_{n\to\infty}(n^2-2n^3)$は，$n$を限りなく大きくするといずれも $\infty-\infty$ なるが式変形をすると，

$$\lim_{n\to\infty}(2n^3-n^2)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(2-\frac{1}{n}\right)=+\infty, \qquad \lim_{n\to\infty}(n^2-2n^3)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(\frac{1}{n}-2\right)=-\infty,$$

となり,式によって結果が異なることが分かる。つまり,nを限りなく大きくして $\infty-\infty$ となる場合は，すぐに結論を出せず，式変形を要することが分かる。

このように与えられた式によって結果が異なる$\frac{\infty}{\infty}$，$\infty-\infty$等の式の形を“不定形”という。

【具体的な指導法】

数列の極限を計算する場合，n を限りなく大きくしたときに，不定形になったら，不定形を解消してから解を求める。

不定形の説明をする場合，簡単な例を用いて説明し，定着してから複雑な式で定着を図る。

① $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n}$，$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}$，$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}$は，$n$を限りなく大きくするといずれも$\frac{\infty}{\infty}$となるが，式変形(今回の例では約分のみ)をすると，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n}=\lim_{n\to\infty}n=\infty \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}=\lim_{n\to\infty}1=1$$

となり，式によって結果が異なることが分かる。つまり，nを限りなく大きくして $\frac{\infty}{\infty}$ となる場合は，すぐに結論を出せず，式変形を要することが分かる。

② $\lim_{n\to\infty}(2n^2-n^2)$，$\lim_{n\to\infty}(n^2-2n^2)$，$\lim_{n\to\infty}(n^2-n^2)$は，$n$を限りなく大きくするといずれも $\infty-\infty$ なるが，式変形(今回の例では計算のみ)をすると，

$$\lim_{n\to\infty}(2n^2-n^2)=\lim_{n\to\infty}n^2=+\infty, \qquad \lim_{n\to\infty}(n^2-2n^2)=\lim_{n\to\infty}(-n^2)=-\infty, \qquad \lim_{n\to\infty}(n^2-n^2)=\lim_{n\to\infty}0=0$$

となり，式によって結果が異なることが分かる。つまり，nを限りなく大きくして $\infty-\infty$ となる場合は，すぐに結論を出せず，式変形を要することが分かる。

例題１　次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}(3n-2)$　(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{3n^2-4}$　(3) $\lim_{n\to\infty}\left(-n-\sqrt{n+1}\right)$　(4) $\lim_{n\to\infty}\left(2n-\sqrt{4n^2+n}\right)$

解説

(1) $\lim_{n\to\infty}(3n-2)$

$=+\infty$

n を限りなく大きくして，∞－２
不定形ではないので式変形することなく，結果を求められる。

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{3n^2-4}$

nを限りなく大きくして
$\frac{\infty}{\infty}$ の不定形
式変形を要す。

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{3-4\frac{1}{n^2}}$

$=\frac{1}{3}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\left(-n-\sqrt{n+1}\right)$

$=-\infty$

n を限りなく大きくして，－∞－∞
不定形ではないので式変形することなく，結果を求められる。

(4) $\lim_{n\to\infty}\left(2n-\sqrt{4n^2+n}\right)$

n を限りなく大きくして，∞－∞ の不定形

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2n-\sqrt{4n^2+n}\right)\left(2n+\sqrt{4n^2+n}\right)}{2n+\sqrt{4n^2+n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{2n+\sqrt{4n^2+n}}$

n を限りなく大きくして，まだ，$\frac{-\infty}{\infty}$ の不定形

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{2+\sqrt{4+\frac{1}{n}}}$

$=-\frac{1}{4}$

上の解説のように，一度，n を限りなく大きくして，不定形になるかを確認し，不定形なら不定形を解消するために処理をするように指導する。