定積分を利用した不等式の証明

定積分を利用した不等式の証明は，「階段状に並んだ長方形の面積和」と「関数の定積分による面積」の大小を比較することで示される。与えられた不等式から，関数と積分区間を読み取れるようにすることが大切である。以下の手順で求める。

【ポイント①】関数を読み取る。

関数を読み取るには，数列の和の項に注目する。

例１　$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}>\log(n+1)$　　$\Rightarrow$　$f(x)=\dfrac{1}{x}$ とおく

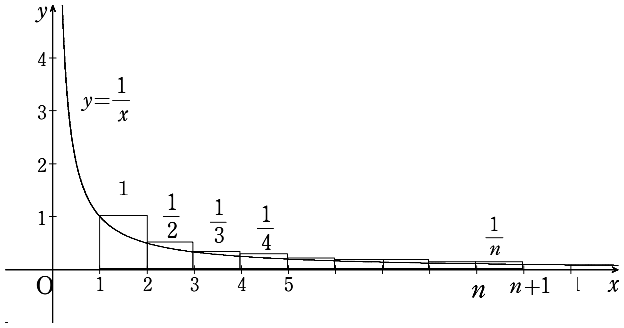
例２　$\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n^2}<1-\dfrac{1}{n}$　　$\Rightarrow$　$f(x)=\dfrac{1}{n^2}$ とおく

【ポイント②】関数のグラフに長方形をかき込む。

関数を読み取ることができたら，関数のグラフに長方形をかき込み面積を比較する。そのとき，関数のグラフに対し，長方形を上側に飛び出させるか，下側に納めるかは，数列の和の項が長方形の面積の和を表すので，数列の和の項に対し，不等号の向きがどちらになっているかで判断する。

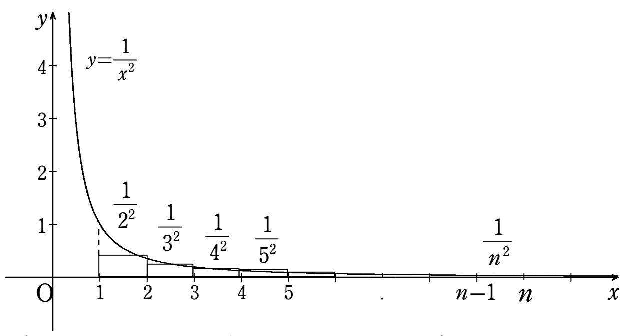
例１　$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}>\log(n+1)$

数列の和の項と不等号の向きから，図のように，長方形をグラフの上側に飛び出すように，n 個の長方形を記入する。



例２　$\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n^2}<1-\dfrac{1}{n}$

数列の和の項と不等号の向きから，図のように，長方形をグラフの下側に納まるように，n－１個の長方形を記入する。



【ポイント③】積分区間を読み取り，積分して面積を求める。

左端の長方形の左側の x から，右端の長方形の右側の x までが積分区間になる。先程の例１では，積分区間は［１，n＋１］になる。したがって，$y=\dfrac{1}{x}$ で囲まれた部分の面積を求めると，

$$\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,dx=\Big[\log x\Big]_1^{n+1}=\log(n+1)$$

先程の例２では，積分区間は［１，n］になるので，$y=\dfrac{1}{x^2}$ で囲まれた部分の面積を求めると，

$$\int_1^{n+1}\frac{1}{x^2}\,dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{n}=-\frac{1}{n}+1=1-\frac{1}{n}$$

類題　定積分を利用して，次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n+1}-1)$$

解答　$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$とおく。

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$が単調減少関数だから，積分区間を［１，n＋１］として，

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<\int_1^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx \quad \cdots\cdot ①$$

ここで

$$\int_1^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\left[2\sqrt{x}\right]_1^{n+1}=2\sqrt{n+1}-2\sqrt{1}=2(\sqrt{n+1}-1)$$

であるから①より

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n+1}-1)$$