漸近線の求め方

漸近線をもつ関数のグラフをかくときは，漸近線を求める必要がある。漸近線についてまとめると以下のようになる。

(1) $\lim_{x\to\infty} f(x)=a$ または $\lim_{x\to-\infty} f(x)=a$ のとき直線 $y=a$ は漸近線。

(2) $\lim_{x\to p+0} f(x)=\infty$ または $\lim_{x\to p-0} f(x)=\infty$ または $\lim_{x\to p+0} f(x)=-\infty$ または $\lim_{x\to p-0} f(x)=-\infty$ のとき直線 $x=p$ は漸近線。

(3) $\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ または $\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ のとき直線 $y=ax+b$ は漸近線。

(3)の a と b は，以下のようにすると求めることができる。

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)$$

$y=f(x)$ の漸近線が $y=ax+b$ とすると，x が＋∞あるいは－∞のとき，y の値はほぼ同じと考えられるので，

$f(x)\fallingdotseq ax+b$ ・・・①

とおける。両辺を x で割って，lim 計算すると，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(a+\frac{b}{x}\right)$$

よって，$a=\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

b は，求めた a を①に代入し，lim 計算すると，

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)$$

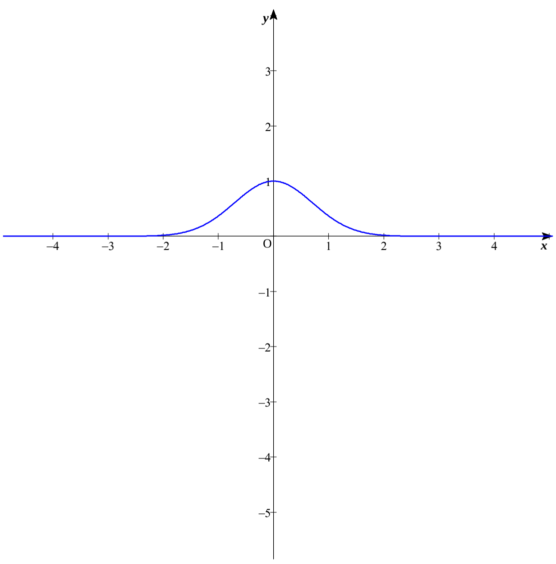
【具体的な例】

1 $y=e^{-x^2}$ のグラフ

$y'=-2xe^{-x^2},\ y''=2(2x^2-1)e^{-x^2}$

増減表は下図。

x	…	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	…	0	…	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	…
y'	＋	＋	＋	0	―	―	―
y''	＋	0	―	―	―	0	＋
y	↗	$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$	↗	1	↘	$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$	↘



ここで $\lim_{x\to\infty} y=0,\ \lim_{x\to-\infty} y=0$ であるから　x 軸は，グラフの漸近線である。

2　$y=3x+\sqrt{x^2-1}$ のグラフ

$y'=\dfrac{3\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}$　　　$y''=\dfrac{-1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$　より

x	$\cdots$	$-\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$	$\cdots$	-1	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$			$+$
y''	$-$	$-$	$-$			$-$
y	↗	$-2\sqrt{2}$	↘	-3	3	↗

$\displaystyle\lim_{x\to -1-0} y'=-\infty$　　　$\displaystyle\lim_{x\to 1+0} y'=+\infty$

漸近線を $y=ax+b$ とすると

$x\to\infty$ のとき，

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(3+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)=4$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\{f(x)-ax\}=\lim_{x\to\infty}(3x+\sqrt{x^2-1}-4x)=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$$

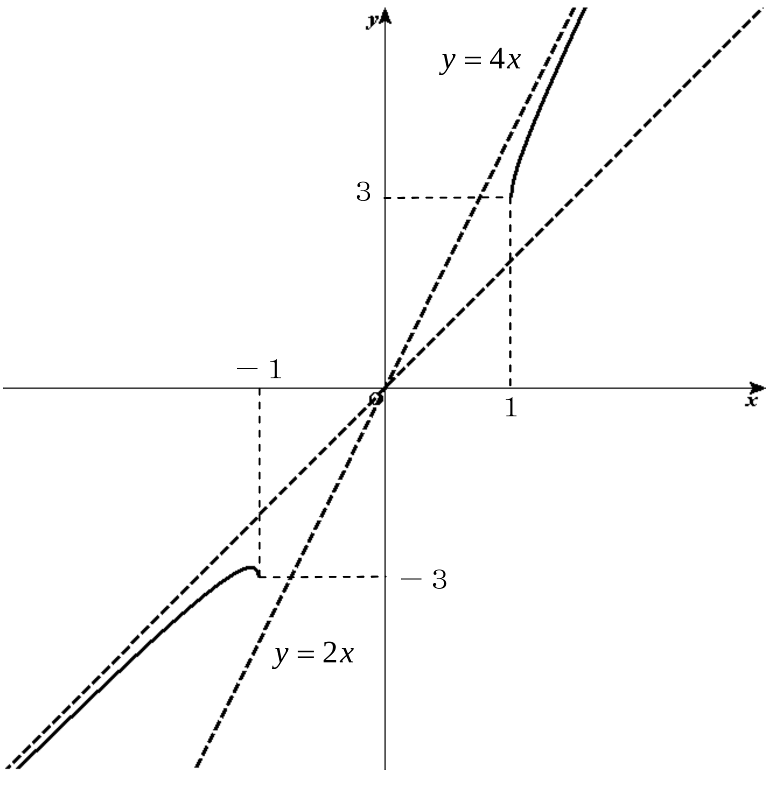
したがって漸近線は $y=4x$

$x\to-\infty$ のとき，$t=-x$ とおくと $t\to+\infty$

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{3(-t)+\sqrt{t^2-1}}{-t}=\lim_{t\to\infty}\left(3-\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}\right)=2$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-ax\}=\lim_{x\to-\infty}(3x+\sqrt{x^2-1}-2x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-1}-t)=\lim_{t\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{t^2-1}+t}=0$$

したがって漸近線は $y=2x$



3　分数関数の例１

$y=\dfrac{x^2}{x-2}$ のグラフ

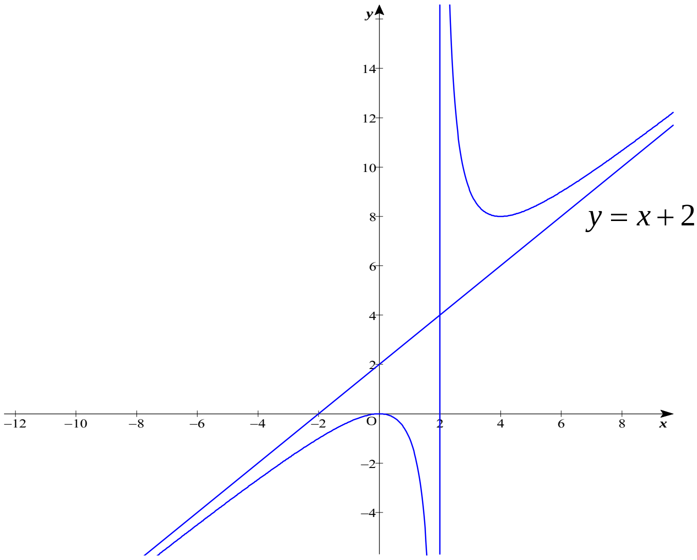
$y=\dfrac{(x-2)(x+2)+4}{x-2}=x+2+\dfrac{4}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\{y-(x+2)\}=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty}\{y-(x+2)\}=0$

よって $y=x+2$ は漸近線

$\lim\limits_{x\to2+0}y=\infty,\ \lim\limits_{x\to2-0}y=-\infty$

よって $x=2$ は漸近線



分数関数の例２

$y=\dfrac{x^3+1}{x}$ のグラフ

$y=\dfrac{x^3+1}{x}=x^2+\dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to-0}y=-\infty,\ \lim\limits_{x\to+0}y=\infty$　より，

漸近線は直線 $x=0$

また，

$\lim\limits_{x\to\infty}\{y-x^2\}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，　$\lim\limits_{x\to-\infty}\{y-x^2\}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$ より，

$x\to\pm\infty$ のとき $y=x^2+\dfrac{1}{x}\fallingdotseq x^2$

よってこのグラフは，$y=x^2$ に近づく。