公式を活用して文字の置換をせずに定積分を計算する

置換積分法を用いて定積分の計算する場合，置換した文字の積分区間を改めて計算する必要がある。しかし，次の積分公式に当てはまる場合は，置換せずに定積分を計算することができる。

積分公式

① $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + C$　　② $\displaystyle\int \{f(x)\}^n f'(x)dx = \frac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$

（例１）　$\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x}dx$

（解）（与式）$\displaystyle = \int_1^{\mathrm{e}} \{(\log x)\}^1 (\log x)' \, dx$

となるので，②の公式で $f(x) = \log x$ ，$n = 1$ の形と考え，

（与式）$\displaystyle = \left[\frac{1}{2}\{\log x\}^2\right]_1^e = \frac{1}{2}\{(\log e)^2 - (\log 1)^2\} = \frac{1}{2}(1^2 - 0^2) = \frac{1}{2}$

と計算できる。

（参考）置換積分で計算をした場合

$u = \log x$ とおく

$\displaystyle\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$ より，$\displaystyle\frac{1}{x}dx = du$

x	$1 \longrightarrow e$
$u = \log x$	$0 \longrightarrow 1$

$$\int_1^e \frac{\log x}{x}dx = \int_0^1 u\,du = \left[\frac{1}{2}u^2\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

（例２）　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cdot \cos x dx$

②の公式で　$f(x) = \sin x$ ，$n = 3$ 　の形と考え，

（与式）$\displaystyle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x (\sin x)' dx = \left[\frac{1}{4}\sin^4 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\{(\sin\frac{\pi}{2})^4 - (\sin 0)^4\} = \frac{1}{4}(1^4 - 0^4) = \frac{1}{4}$

（例３）　$\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx$

②の公式で　$f(x) = x^2 + 1$，$n = \dfrac{1}{2}$ の形と考え，係数を調整すると，

（与式）$\displaystyle = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+1)^{\frac{1}{2}}(2x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+1)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)' dx$

と変形できるので，

（与式）$\displaystyle = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(x^2+1)^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}}\{(1+1)^{\frac{3}{2}} - (0+1)^{\frac{3}{2}}\} = \frac{1}{3}(2^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}) = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$

（例４） $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$

①の公式で $f(x)=e^x+1$ の形と考え，

（与式） $=\int_0^1 \frac{(e^x+1)'}{(e^x+1)}dx=\left[\log\left|e^x+1\right|\right]_0^1=\log(e+1)-\log(1+1)=\log\frac{e+1}{2}$

（例５） $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx$

これは $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=-\frac{(-\sin x)}{\cos x}=-\frac{(\cos x)'}{\cos x}$ となり，①の形である。

（与式） $=-\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\cos x)'}{\cos x}dx=-\left[\log\left|\cos x\right|\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=-(\log\frac{1}{2}-\log 1)=\log 2$

【指導上の留意事項】

上の例のように，積分公式に当てはめることができる問題ばかりではないので，置換積分の方法を定着させておく必要がある。

（例６）

$\int_2^5 x\sqrt{x-1}dx$

$x=t+1$ とおくと　$\therefore\ \frac{dx}{dt}=1$　　$\therefore\ dx=dt$

x	$2 \longrightarrow 5$
$t=x-1$	$1 \longrightarrow 4$

$\int_2^5 x\sqrt{x-1}dx=\int_1^4 (t+1)\sqrt{t}dt=\int_1^4 (t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{1}{2}})dt=\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^4=\frac{2}{5}(4^{\frac{5}{2}}-1^{\frac{5}{2}})+\frac{2}{3}(4^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}})$

$=\frac{2}{5}(2^5-1)+\frac{2}{3}(2^3-1)=\frac{62}{5}+\frac{14}{3}=\frac{256}{15}$