道のり（曲線の長さ）

道のり（曲線の長さ）を求めることを，難しいと感じている生徒は多い。物理と関連させて，道のり（曲線の長さ）を求める原理を理解させ，実際に計算ができるように指導したい。簡単に道のりが求められそうな関数（２次関数・三角関数など）でも，問題が解けないこともあるので扱う題材には注意を要する。

1　道のり（曲線の長さ）について

物理では，v-t グラフ（速さと時間のグラフ）の面積を用いて，物体の進んだ距離を求めた。面積を求めるということは，数学では定積分を計算すること同じなので，道のりを求めることは，速さの関数 v を時間 t で積分をすればよいということである。

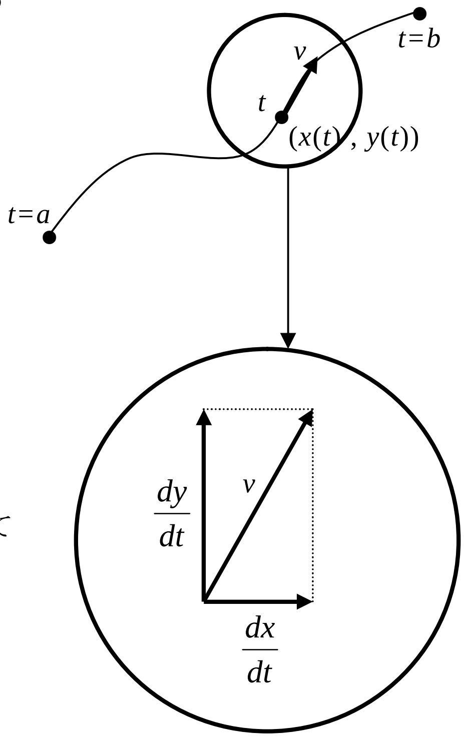
今，右の図のように，時間 t における点$(x(t)\,,\,y(t))$ における速さ v は，x 軸方向の速さ $\dfrac{dx}{dt}$ と，y 軸方向の速さ $\dfrac{dy}{dt}$ を用いて，三平方の定理より，

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

となる。よって，道のりは，速さを積分して，

$$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

となる。



特に，曲線が $y=f(x)$（$a\leqq x\leqq b$）の形で表わされている場合は，

$x=t$，$y=f(t)$（$a\leqq t\leqq b$）

と考えると，

$$\frac{dx}{dt}=1,\quad \frac{dy}{dt}=f'(t)$$

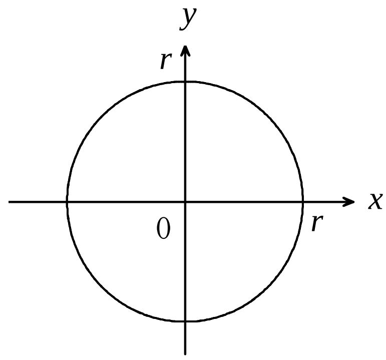
となるので，

$$\int_a^b \sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt$$

で求めることができる。

（注）教科書には，$\displaystyle\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$ と書かれているが，上式を $t=x$ で変数変換すれば同じ式である。

$\boxed{2}$ 具体的な計算



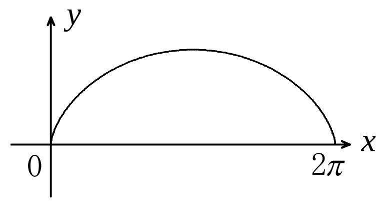
（例１） $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$（円周）

$\dfrac{dx}{dt} = -r\sin t$， $\dfrac{dy}{dt} = r\cos t$ と，対称性から

曲線の長さは，

$$2\int_0^{\pi} \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\, dt = 2\int_0^{\pi} r\, dt = 2\pi r$$

（例２） $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$（サイクロイド）



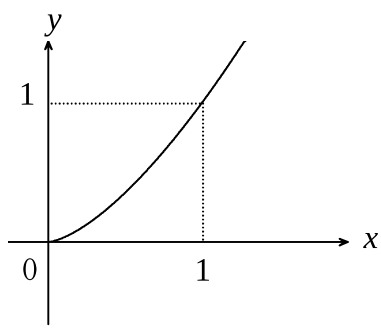
$\dfrac{dx}{dt} = 1 - \cos t$， $\dfrac{dy}{dt} = \sin t$ と，対称性から

曲線の長さは，

$$2\int_0^{\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + (\sin t)^2}\, dt = 2\int_0^{\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{4\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt = 4\int_0^{\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 4\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{\pi} = 8$$

（例３） $y = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$



$y' = \sqrt{x}$ より，

$$\int_0^1 \sqrt{1+x}\, dx = \left[\frac{2}{3}(1+x)\sqrt{1+x}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3}$$

$\boxed{3}$ 例題や問題作りにおける注意点

・理論上は①に掲げた方法で計算式は立てられるが，$\sqrt{\ }$ があるために積分ができる曲線は限られる。

（例）計算可能な関数は， $y = \log x$， $y = \log(1 - x^2)$， $y = \log(\cos x)$， $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ など

・上の（例１）において，楕円周の長さは式を立てることはできるが，計算できない。

・上の（例３）において，２次関数や３次関数にすると場合により計算できない。

（例） $y = x^2$ のとき， $\sqrt{1 + 4x^2}$ の積分を計算することになる。