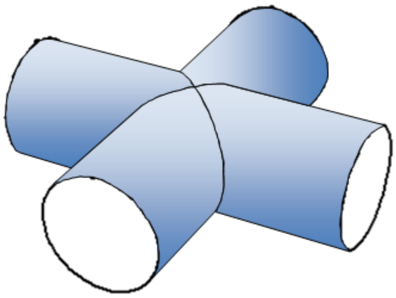
直交する円筒の共通部分

直交する円筒の共通部分の体積を求める問題は，非回転体の求積問題として，授業でもよく扱われる。しかし，共通部分の立体が，どのような形になるかイメージできない生徒が多く，解説を聞いてもモヤモヤ感が残り，すっきりしていないようである。そこで，ここでは，その共通部分の立体について考えてみる。



１　直交する２本の円筒の共通部分

(1) 共通部分の模型を作る

直交する円筒の様子を真上から見ると，図１のようになっている。よって，共通部分の模型を作るには，図２の斜線部分，つまり図３のように，円筒を 45°傾けた平面でカットし，できた円筒の上部を８枚作り，糊付けすればよいことが分かる。

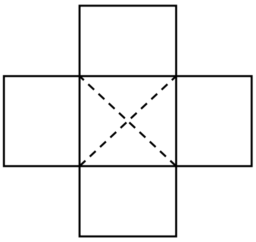


図１

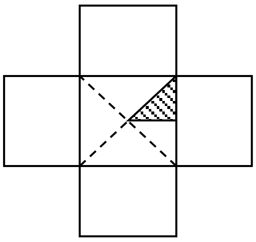


図２

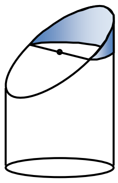


図３

［例題１］円筒を 45°傾けた平面でカットすると，切り口は楕円になる。それでは，カットされた円筒を図４の直線ＡＢに沿ってはさみで切り，展開すると，先ほどの切り口の楕円は，図５のようなサインカーブを描くことを証明せよ。

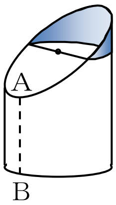


図４

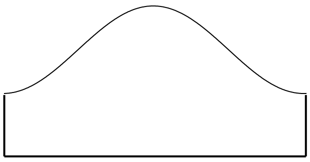


図５

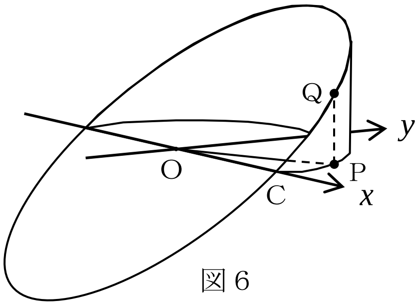


図６

(証明) 円筒の半径を r とし，図６のように x 軸と y 軸を入れて，原点をＯ，円周と x 軸の正の部分との交点をＣ，円周上の点をＰとする。点Ｐから垂直に線を引き楕円との交点をＱとする。

図７は，図６を真上から見た図である。

図８は，図６を真横から見た図である。

∠ＰＯＣ＝θ　として，弧ＰＣをＸ，線分ＱＰの長さをＹとして，（Ｘ，Ｙ）の軌跡が，求める展開図の曲線である。

$$\mathrm{X} = r\theta \qquad \mathrm{Y} = r\sin\theta$$

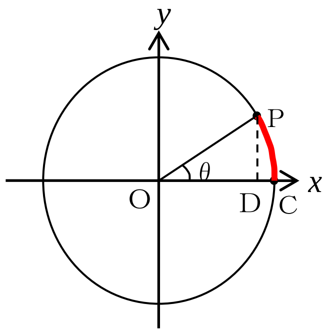


図７

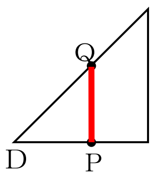


図８

媒介変数 θ を消去すると,

$$Y = r\sin\frac{X}{r}$$

このグラフは, $y = \sin x$ のグラフを x 軸方向に r 倍, y 軸方向に r 倍したもの,つまり, $y = \sin x$ を全体的に r 倍したグラフである(図９)。　　　　　(証明終)

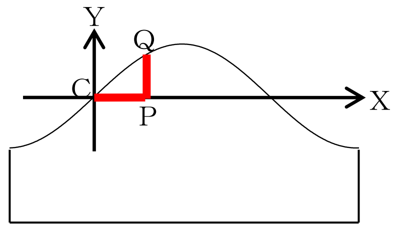


図９

例題１の結果から,共通部分の模型を作るには, $y = \sin x$ のグラフの,ひと山を 180° 回転させて合わせたもの(図 10)を４枚準備し,糊付けすると完成である(図 11)。

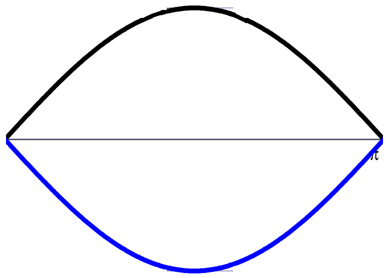


図 10

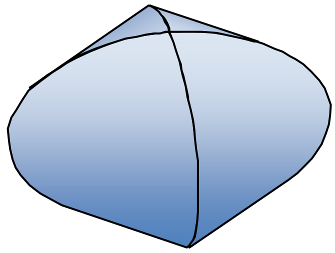


図 11

(2) 表面積と体積を求める

ア　表面積

$y = \sin x$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を求め r^2 倍し,更に８倍すればよい。

$$S = 8 \times r^2 \times \int_0^{\pi} \sin x\, dx = 8 \times r^2 \times \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = 16r^2$$

イ　体積

立体を真上から見たのが図 12,真横から見たのが図 13 である。

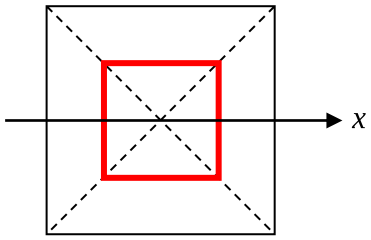


図 12

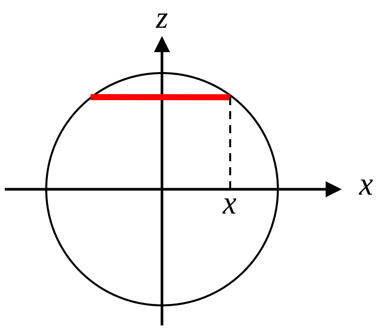


図 13

z 軸に垂直な平面で立体をスライスしていくと,その切り口は正方形になる。図 13 の円の方程式を $x^2 + z^2 = r^2$ とすると,正方形の一辺の長さは $2x$ となるので,体積Ｖは

$$V = \int_{-r}^{r} (2x)^2\, dz = 8\int_0^{r} (r^2 - z^2)\, dz = 8\left[r^2 z - \frac{1}{3}z^3\right]_0^{r} = \frac{16}{3}r^3$$

2　直交する３本の円筒の共通部分

先ほどの，直交する２本の円筒に，さらに垂直にもう１本の円筒を交わらせると，共通部分の立体はどうなるのだろうか。また，その表面積と体積はどうなるのだろうか。

(1)　共通部分の模型を作る

直交する２本の円筒の共通部分をベースに考えると分かりやすい。２本の場合の完成図(図 11)と，真上から見た図(図 12)を並べてみる。

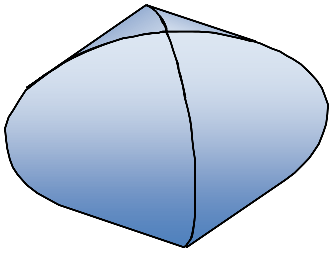


図 11

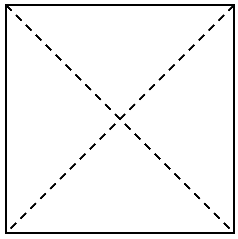


図 12

この立体に対し，真上から垂直に円筒を差し込むと，切込みの線は次のように入る。

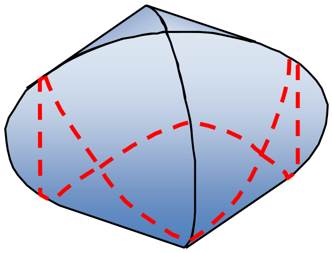


図 11

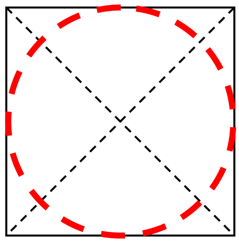


図 12

先ほど使用したサインカーブ(図 10)に対し，切込み線は次の図 14 のように入る。この線は，やはりサインカーブである。残った部分を 12 枚，つなぎ合わせると完成である(図 15)。

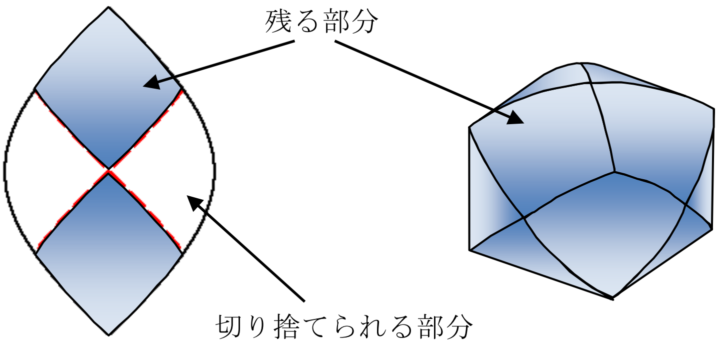


図 14　　図 15

共通部分の模型を作るには，図 16 のように，

$y = \sin x$，　$y = -\sin x$

$y = \cos x$，　$y = -\cos x$

の４本で囲まれた部分を使用する。

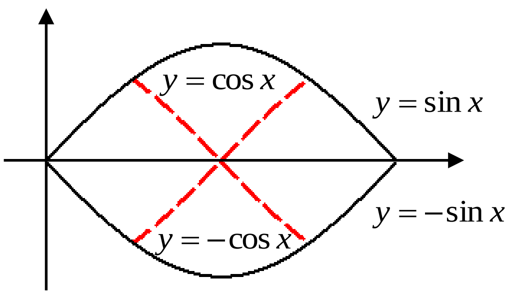


図 16

(2) 表面積と体積を求める

ア　表面積

1枚の面積を 12 倍する。求める面積をＳとすると,

$$S = 12\times\left(4\times\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,dx\right) = 12\times4\times\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 48\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

イ　体積

立体の中心には，図 17 のように一辺が $\sqrt{2}\,r$ の立方体があり，その各面に出っ張った部分がくっついている。1つの出っ張った部分の体積は，1 (2)イのときと同様に，z 軸に垂直な平面で立体をスライスしてできる正方形の面積を $\frac{\sqrt{2}}{2}r$ から r まで積分すればよい(図 18)。求める体積をＶとすると,

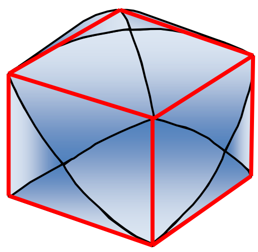


図 17

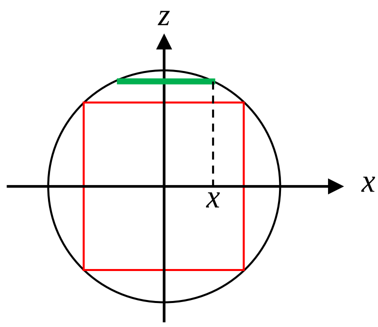


図 18

$$V = \left(\sqrt{2}\,r\right)^3 + 6\times\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}r}^{r}(2x)^2\,dz = 2\sqrt{2}\,r^3 + 24\times\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}r}^{r}(r^2-z^2)\,dz$$

$$= 2\sqrt{2}\,r^3 + 24\times\left[r^2z-\frac{1}{3}z^3\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}r}^{r} = (16-8\sqrt{2})r^3$$