逆三角関数の定積分への応用

定積分$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ を計算する際に，$x=\tan\theta$ と置換して計算する。これは，公式

$$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

を活用することにより，簡単に計算できるから$x=\tan\theta$ と置換しているのだが，$\tan\theta$ と$\dfrac{1}{1+x^2}$の間の密接な関係を知ると，$x=\tan\theta$ と置換するのが自然であることが分かる。

例題１　$(\tan^{-1}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$ となることを証明せよ。

$\boxed{\text{証明}}$　$y=\tan^{-1}x$ とする。ただし，１対１の関係になるように，$-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

$x=\tan y$　として，両辺をyで微分する。

$$\frac{dx}{dy}=\frac{d}{dy}\tan y$$
$$=\frac{1}{\cos^2 y}$$

よって，$(\tan^{-1}x)'=(y)'$
$$=\frac{dy}{dx}$$
$$=\cos^2 y$$

ここで，$\dfrac{1}{\cos^2 y}=1+\tan^2 y$ より

$$(\tan^{-1}x)'=\frac{1}{1+\tan^2 y}$$
$$=\frac{1}{1+x^2}$$　$\boxed{\text{終}}$

この例題１の結果を使うと，定積分$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ の計算は，次のようになる。

$\boxed{\text{解答}}$　$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^1 (\tan^{-1}x)'dx=\left[\tan^{-1}x\right]_0^1$

ここで，$\tan^{-1}1=\dfrac{\pi}{4}$　，$\tan^{-1}0=0$　より，$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}$

それでは，同じように，$(\sin^{-1}x)'$ や$(\cos^{-1}x)'$ がどのような式になるか確認し，定積分の計算への活用を検討してみる。

例題２　$(\sin^{-1}x)'$ をxで表し，$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ を計算せよ。

$\boxed{\text{解答}}$　$y=\sin^{-1}x$ とする。ただし１対１対応にするために，$-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

$x=\sin y$ として，両辺をyで微分する。

$$\frac{dx}{dy}=\frac{d}{dy}\sin y$$

$$=\cos y$$

よって，$(\sin^{-1}x)'=(y)'$

$$=\frac{dy}{dx}$$

$$=\frac{1}{\cos y}$$

ここで，$\sin^2 y+\cos^2 y=1$ より，$\cos y=\pm\sqrt{1-\sin^2 y}$

今，$-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$ で考えているので，$\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}$

$$(\sin^{-1}x)'=\frac{1}{\cos y}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

よって，

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(\sin^{-1}x)'dx$$

$$=\left[\sin^{-1}x\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{\pi}{4}$$

$\boxed{\text{補足}}$　$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ の計算は，$x=\sin t$ と置くと，$dx=\cos t\,dt$　積分区間 $t:0\to\dfrac{\pi}{4}$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos t}{|\cos t|}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt=\frac{\pi}{4}$$