定積分の計算(証明問題)

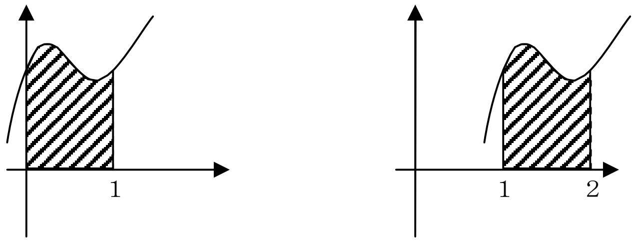
定積分の性質を利用した証明問題がよく出題される。そこで，それらの問題の特徴について考察し，まとめてみる。

【平行移動型】

［例題１］次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_1^2 f(x-1)dx$$

（考察）被積分関数に注目すると，左辺の $f(x)$ に対し，右辺は，x の代わりに $x-1$ が入り $f(x-1)$ となっている。$y = f(x-1)$ は，$y = f(x)$ を x 軸方向に１だけ平行移動したものである。



結局，$f(x)$ の x の部分が異なっているので違って見えるが，平行移動しているだけで，結果的には，積分計算をしても変わらないことが分かる。

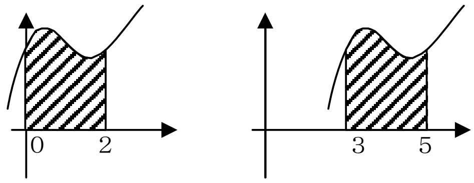
（証明）$\int_1^2 f(x-1)dx$ で，$t = x-1$ とすると，

x	$1 \to 2$
t	$0 \to 1$

右辺$= \int_1^2 f(x-1)dx = \int_0^1 f(t)\,dt =$左辺

$\boxed{\text{類題１}}$ 次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_3^5 f(x-3)dx$$



（証明）$\int_3^5 f(x-3)dx$ で，$t = x-3$ とすると，

右辺$= \int_3^5 f(x-3)dx = \int_0^2 f(t)\,dt =$左辺

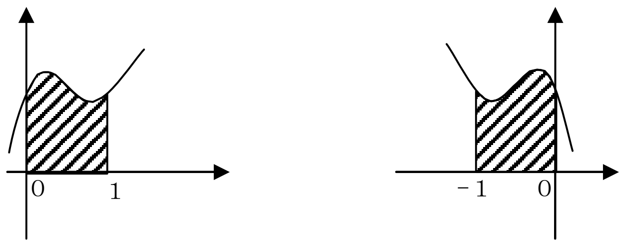
x	$3 \to 5$
t	$0 \to 2$

【線対称型】

［例題２］次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(-x)dx$$

（考察）被積分関数に注目すると，左辺の $f(x)$ に対し，右辺は，x の代わりに $-x$ が入り $f(-x)$ となっている。$y = f(-x)$ は，$y = f(x)$ を y 軸に対し対称移動したグラフである。



結局，y 軸に対し対称移動しているだけで，結果的に，積分計算をしても変わらないことが分かる。

（証明） $\int_{-1}^{0} f(-x)dx$ で，$t=-x$ とすると，

x	$-1 \to 0$
t	$1 \to 0$

右辺$=\int_{-1}^{0} f(-x)dx=\int_{1}^{0} f(t)(-dt)=\int_{0}^{1} f(t)\,dt=$左辺

$\boxed{類題２}$ 次の等式が成り立つことを証明せよ。

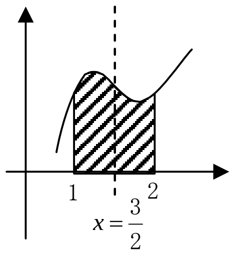
(1) $\int_{1}^{2} f(3-x)dx=\int_{1}^{2} f(x)dx$

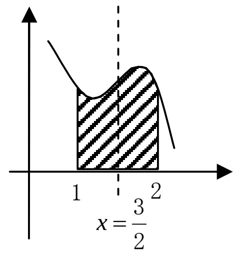
(2) $\int_{0}^{1}\{f(x)+f(1-x)\}dx=2\int_{0}^{1} f(x)dx$

$\dfrac{(3-x)+x}{2}=\dfrac{3}{2}$ となることから分かる。

（証明）

(1) $y=f(3-x)$ は，$y=f(x)$ を直線 $x=\dfrac{3}{2}$ に対して対称移動させたグラフである。





したがって，$\dfrac{t+x}{2}=\dfrac{3}{2}$，つまり，$t=3-x$ とすると証明できる。

$\int_{1}^{2} f(3-x)dx$ で，$t=3-x$ とすると，

x	$1 \to 2$
t	$2 \to 1$

右辺$=\int_{1}^{2} f(3-x)dx=\int_{2}^{1} f(t)(-dt)=\int_{1}^{2} f(t)\,dt=$左辺

(2) $\int_{0}^{1}\{f(x)+f(1-x)\}dx=\int_{0}^{1} f(x)dx+\int_{0}^{1} f(1-x)dx$

ここで，$y=f(1-x)$ は，$y=f(x)$ を直線 $x=\dfrac{1}{2}$ に対して対称移動させたグラフである。

したがって，$\dfrac{t+x}{2}=\dfrac{1}{2}$，つまり，$t=1-x$ とすると証明できる。

$\int_{0}^{1} f(1-x)dx$ は，$t=1-x$ とすると，

x	$0 \to 1$
t	$1 \to 0$

$\int_{0}^{1} f(1-x)dx=\int_{1}^{0} f(t)(-dt)=\int_{0}^{1} f(t)\,dt$

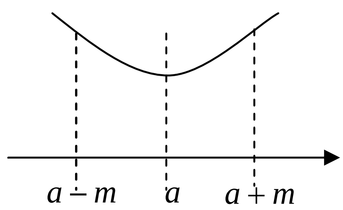
となるから，

$\int_{0}^{1}\{f(x)+f(1-x)\}dx=2\int_{0}^{1} f(x)dx$

【特別な $f(x)$】

［例題３］ $f(a-x)=f(a+x)$ が成り立つとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\int_{a-m}^{a+m} f(x)dx=2\int_{a}^{a+m} f(x)dx$$



（考察） $\dfrac{a-x+a+x}{2}=a$ が成り立つから，条件 $f(a-x)=f(a+x)$ より，$f(x)$ は直線 $x=a$ に対して左右対称であることが分かる。

したがって，定積分が，面積計算であることを考えると，問題の等式は自明であることが分かる。

（証明）$\int_{a-m}^{a+m} f(x)dx = \int_{a-m}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{a+m} f(x)dx$

直線 $x=a$ に対して対称に移したいため

ここで，$\int_{a-m}^{a} f(x)dx$ において，$\dfrac{t+x}{2}=a$ つまり，$t=2a-x$ とすると，

x	$a-m \to a$
t	$a+m \to a$

$$\int_{a-m}^{a} f(x)dx = \int_{a+m}^{a} f(2a-t)\,(-dt) = \int_{a}^{a+m} f(2a-t)\,dt$$

ここで，条件 $f(a-x)=f(a+x)$ より，

$$f(2a-t)=f(a+(a-t))=f(a-(a-t))=f(t)$$

よって，

$$\int_{a-m}^{a} f(x)dx = \int_{a}^{a+m} f(t)\,dt$$

以上の結果から，$\int_{a-m}^{a+m} f(x)dx = 2\int_{a}^{a+m} f(x)dx$

$\boxed{類題３}$ $f(a-x)=f(x)$ が成り立つとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1) $\int_{0}^{\frac{a}{2}} f(x)dx = \int_{\frac{a}{2}}^{a} f(x)dx$

(2) $\int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{\frac{a}{2}}^{a} f(x)dx$

（証明）$\dfrac{a-x+x}{2}=\dfrac{a}{2}$ が成り立つから，条件 $f(a-x)=f(x)$ より，

$f(x)$ は直線 $x=\dfrac{a}{2}$ に対して左右対称であることがわかる。

直線 $x=\dfrac{a}{2}$ に対して対称に移したいため

(1) $\int_{\frac{a}{2}}^{a} f(x)dx$ において，$\dfrac{t+x}{2}=\dfrac{a}{2}$ つまり，$t=a-x$ とすると，

x	$\frac{a}{2} \to a$
t	$\frac{a}{2} \to 0$

$$\int_{\frac{a}{2}}^{a} f(x)dx = \int_{\frac{a}{2}}^{0} f(a-t)\,(-dt) = \int_{0}^{\frac{a}{2}} f(a-t)\,dt$$

ここで，条件 $f(a-x)=f(x)$ より，

$$f(a-t)=f(t)$$

よって，

$$\int_{\frac{a}{2}}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{\frac{a}{2}} f(t)\,dt$$

以上より，$\int_{0}^{\frac{a}{2}} f(x)dx = \int_{\frac{a}{2}}^{a} f(x)dx$

(2) $\int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{\frac{a}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{a}{2}}^{a} f(x)dx$

ここで，(1)より $\int_{0}^{\frac{a}{2}} f(x)dx = \int_{\frac{a}{2}}^{a} f(x)dx$ だから，$\int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{\frac{a}{2}}^{a} f(x)dx$

$\boxed{類題４}$ $f(a-x)=-f(a+x)$ が成り立つとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\int_{a-m}^{a+m} f(x)dx = 0$$

（証明）$\dfrac{a-x+a+x}{2}=a$ が成り立つから，条件 $f(a-x)=-f(a+x)$ より，$f(x)$ は点$(a，0)$に関

して点対称であることが分かる。

$$\int_{a-m}^{a+m} f(x)dx = \int_{a-m}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{a+m} f(x)dx$$

x	$a-m \to a$
t	$a+m \to a$

ここで，$\int_{a-m}^{a} f(x)dx$ において，$\dfrac{t+x}{2}=a$ つまり，$t=2a-x$ とすると，

$$\int_{a-m}^{a} f(x)dx = \int_{a+m}^{a} f(2a-t)\,(-dt) = \int_{a}^{a+m} f(2a-t)\,dt$$

ここで，条件 $f(a-x)=f(a+x)$ より，

$$f(2a-t)=f(a+(a-t))=-f(a-(a-t))=-f(t)$$

よって，

$$\int_{a-m}^{a} f(x)dx = -\int_{a}^{a+m} f(t)\,dt$$

以上の結果から，$\int_{a-m}^{a+m} f(x)dx = 0$

演習１

(1) 連続関数 $f(x)$ 及び定数 a について，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^{\frac{a}{2}} \{f(x)+f(a-x)\}dx$$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ を求めよ。

（方針） $y=f(a-x)$ は、$y=f(x)$ を直線 $x=\dfrac{a}{2}$ に関し対称移動させたグラフであるから，$\int_0^a f(x)\,dx$ を $\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{a}{2}}^{a} f(x)\,dx$ のように分ける。

（解答）

(1) 左辺$= \displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$

$$= \int_0^{\frac{a}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{a}{2}}^{a} f(x)\,dx$$

とする。ここで，$\int_{\frac{a}{2}}^{a} f(x)\,dx$ において，$\dfrac{t+x}{2}=\dfrac{a}{2}$ つまり，$t=a-x$ とすると，

x	$\frac{a}{2} \to a$
t	$\frac{a}{2} \to 0$

$$\int_{\frac{a}{2}}^{a} f(x)\,dx = \int_{\frac{a}{2}}^{0} f(a-t)\,(-dt) = \int_0^{\frac{a}{2}} f(a-t)\,dt$$

よって，

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^{\frac{a}{2}} \{f(x)+f(a-x)\}dx$$

が成り立つ。

(2) (1)より，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ \frac{\cos x}{\sin x+\cos x} + \frac{\cos(\frac{\pi}{2}-x)}{\sin(\frac{\pi}{2}-x)+\cos(\frac{\pi}{2}-x)} \right\} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ \frac{\cos x}{\sin x+\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x+\sin x} \right\} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

演習２

（1） $f(-x)=f(x)$ が成り立つとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx=\int_{0}^{a}f(x)\,dx$$

（2） 定積分 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+e^{-x}}dx$ を計算せよ。

（証明）

（1） 左辺 $\displaystyle =\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx$

$$=\int_{-a}^{0}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx+\int_{0}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx$$

（方針） $f(-x)=f(x)$ より，y 軸に関して対称であることから，$t=-x$ とする。

とする。ここで，$\displaystyle\int_{-a}^{0}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx$ において，$t=-x$ とすると，

x	$-a\ \to\ 0$
t	$a\ \to\ 0$

$$\int_{-a}^{0}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx=\int_{a}^{0}\frac{f(-t)}{1+e^{t}}(-dt)$$

$$=\int_{0}^{a}\frac{f(-t)}{1+e^{t}}\,dt$$

ここで，$f(-t)=f(t)$ より，

$$=\int_{0}^{a}\frac{f(t)}{1+e^{t}}\,dt$$

よって，

$$\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx=\int_{0}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{x}}\,dx+\int_{0}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx$$

$$=\int_{0}^{a}\left\{\frac{f(x)}{1+e^{x}}+\frac{e^{x}f(x)}{e^{x}+1}\right\}dx$$

$$=\int_{0}^{a}f(x)\,dx$$

よって，

$$\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx=\int_{0}^{a}f(x)\,dx$$

が成り立つ。

（2） $f(x)=x\sin x$ は，$f(-x)=f(x)$ を満たすので(1)より，

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+e^{-x}}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx$$

$$=\Big[x(-\cos x)\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$$

$$=1$$

$\boxed{\text{演習３}}$

（1） $f(x)$ が $0 \leqq x \leqq 1$ で連続な関数であるとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\int_0^{\pi} x\, f(\sin x)\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\, dx$$

（2） 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}dx$ を求めよ。

（方針） $y=\sin x$ が、直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ に関し対称であることから、

$\displaystyle\int_0^{\pi} x\, f(\sin x)\, dx$ を $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, f(\sin x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\, f(\sin x)\, dx$

のように分ける。

（証明）

（1） 左辺 $\displaystyle = \int_0^{\pi} x\, f(\sin x)\, dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, f(\sin x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\, f(\sin x)\, dx$$

とする。ここで，$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\, f(\sin x)\, dx$ において，$\dfrac{t+x}{2}=\dfrac{\pi}{2}$ つまり，$t=\pi-x$ とすると，

x	$\frac{\pi}{2} \to \pi$
t	$\frac{\pi}{2} \to 0$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\, f(\sin x)\, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (\pi-t)\, f(\sin(\pi-t))(-dt)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi-t) f(\sin t)\ dt$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\ dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\, f(\sin t)\ dt$$

よって，

$$\text{左辺} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, f(\sin x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\, f(\sin x)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, f(\sin x)\, dx + \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\ dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, f(\sin x)\ dx$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\ dx$$

一方，右辺は，

$$\text{右辺} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\, dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)\, dx\right\}$$

x	$\frac{\pi}{2} \to \pi$
t	$\frac{\pi}{2} \to 0$

ここで，$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)\, dx$ において，$\dfrac{t+x}{2}=\dfrac{\pi}{2}$ つまり，$t=\pi-x$ とすると，

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)\, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\sin(\pi-t))(-dt)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\ dt$$

となるから，右辺は，

$$\text{右辺} = \frac{\pi}{2}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\, dx\right\}$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\ dx$$

以上より，

(1) の別解

(左辺) − (右辺)

$$= \int_0^{\pi} \left(x-\frac{\pi}{2}\right) f(\sin x)\, dx$$

ここで，$t = x-\dfrac{\pi}{2}$ とすると

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t\, f\left(\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right) dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t\, f(\cos t)\, dt$$

ここで，$t\, f(\cos t)$ は奇関数より，

(左辺) − (右辺) ＝ 0

$$\int_0^{\pi} x\, f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$$

が成り立つ。

(2) (1)より，

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{3+\sin^2 x}dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{4-\cos^2 x}dx$$

ここで， $t=\cos x$ とすると， $dt=-\sin x\ dx$ より，

x	$0 \to \pi$
t	$1 \to -1$

$$\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{4-\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{-dt}{4-t^2}$$

$$= \pi\int_0^1 \frac{dt}{4-t^2}$$

$$= \pi\int_0^1 \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2-t}+\frac{1}{2+t}\right\}dt$$

$$= \frac{\pi}{4}\Big[-\log|2-t|+\log|2+t|\Big]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{4}\log 3$$