資料１

教科指導の充実に関する研究（数学）

―　教員は指導しやすいが生徒は理解しにくい内容について　―

愛知県総合教育センター

教科指導の充実に関する研究(数学)

はじめに

本研究は，「高等学校における当面する数学教育の諸課題について調査研究を進めるとともに，教科指導において指導的役割を果たす人材の育成を図る。また，教科指導の現状と優れた指導法に関する情報交換を行う」という目的で，取り組まれている，愛知県総合教育センターの研究調査事業の１つである。本年度は，その目的の中の「当面する数学教育の諸課題について調査研究」にポイントを置いて研究を進めてきた。具体的には，

- 数学ⅠＡⅡＢの範囲で，教員は指導しやすいが生徒は理解しにくいと感じている内容，教員が指導しにくい内容，生徒が理解しにくい内容がどこなのかを調査し分析する。
- 分析結果を指導上の留意点としてまとめ，具体的な指導法を提案する。

の２つである。

この教員と生徒の意識の差に関する研究調査は，愛知県内の各地区でも研究されているが，当センターでは平成３年に，当時の研究指導主事小笠原文武先生を中心に作成された「授業の手引き」の資料編に残っている。この「授業の手引き」は，初任者に役立てていただくために作成されているもので，授業をするにあたり問題となるいくつかの課題を取り上げ，その対処法について丁寧に解説してあるものである。この年は「教員は指導しやすいか生徒は理解しやすいか」とういう観点から教員と生徒の意識の差に関するアンケート調査を行い，巻末に資料としてその結果も掲載され大いに活用された。「授業の手引き」は，その後，数回の改訂を重ね，現在でも初任者研修の時に活用されている。

本年度，この資料編の教員と生徒の意識の差に関する研究調査に着目したのは，学習指導要領が改訂され，確かな学力を身に付けるために，数学的活動の一層の重視，課題学習の導入など多くの改善がなされたことと，多くの国際的な学力調査が実施され，学力の低下や情意面での問題点が指摘されるなど，生徒の状況が大きく変化したことを受けて，改めて意識の差を調査し，授業改善していく必要があると感じたからである。

高校３年間という限られた時間の中で，多くの内容を効率よく指導していくためには，生徒の理解しにくい内容がどこなのかを的確に把握し，授業改善していくことが大切である。本年度の中等教育資料５月号に掲載されている「高等学校学習指導要領の改訂と今後の展望」と題した座談会の中で，岐阜県教育委員会教育長の松川禮子氏が，「今回の改訂は自分の指導法を見直し，意識改革する 10 年に一度のチャンスである」と述べ，生徒一人一人のつまずきの原因を把握し，教員が指導法を工夫・改善していく必要があるとしている。今回の調査結果の報告書が，今後の授業改善に活用されることを願っている。

平成 22 年２月

愛知県立旭丘高等学校　　教諭　山崎　辰雄
愛知県立日進西高等学校　教諭　山内真澄美
愛知県立丹羽高等学校　　教諭　土川　兼司
愛知県立岡崎高等学校　　教諭　田中　紀子
愛知県立時習館高等学校　教諭　武藤　利昌
愛知県立豊橋南高等学校　教諭　松岡　伸高
愛知県総合教育センター
研究指導主事　齋藤　育浩

目　　次

１　調査の概要

（1）調査の目的

本調査は，以下の２点を目的として実施した。

①　数学ＩＡⅡＢの範囲で,「教員は指導しやすいが生徒は理解しにくいと感じている内容」がどこなのか,「教員が指導しにくい内容」「生徒が理解しにくい内容」がどこなのかを調査し分析する。

②　分析結果を「指導上の留意点」としてまとめ，具体的な指導法を提案する。

（2）調査の方法

教員が指導上注意を要する内容を調査するために，第一段階として，研究協力委員の先生方の学校にお願いをして予備調査を実施し，問題があると思われる内容を絞り込む。第二段階として，その絞り込んだ内容のどこに課題があるのか具体的に原因を追究するために，調査対象を 40 校に拡大し，本調査を実施した。

２　予備調査について

（1）予備調査の内容

数学ＩＡⅡＢの各単元の内容で，どのように感じているかを，以下の選択肢の中から該当するものを１つ選択する。

教員	① 指導しやすい	② まあまあ指導しやすい
	③やや指導しにくい	④ 指導しにくい
生徒	① 理解しやすい	② まあまあ理解しやすい
	③やや理解しにくい	④ 理解しにくい

また，指導しにくい理由，理解しにくい理由がはっきりしている場合には，その理由を自由記述という形で回答をお願いした。

（2）調査対象

調査対象校　研究協力委員が勤務する学校６校

教員　対象校の数学教員

生徒　対象校で数学ＩＡⅡＢを履修し終えた生徒

（3）調査期間

平成 21 年６月～７月

（4）調査結果

ア　回答者数

教員　50 名　生徒　574 名

イ　処理の方法及び数値の解釈

(ｱ) 教員と生徒の意識に差がある内容

選択肢の①または②を回答したものを肯定群，③または④を回答した者を否定群として，教員の肯定群の割合と生徒の肯定群の割合の差が 20 ポイント以上ある内容を,「意識に差がある内容」として，備考欄に$\boxed{\text{A}}$を記した。

(ｲ) 教員が指導しにくいと感じている内容

教員の肯定群の割合が，６割を切っている内容を「教員が指導しにくい内容」とし，備考欄に$\boxed{\text{B}}$を記した。

(ｳ) 生徒が理解しにくいと感じている内容

生徒の肯定群の割合が，６割を切っている内容を「生徒が理解しにくい内容」とし，備考欄に$\boxed{\text{C}}$を記した。

(ｴ) 独立性の検定

教員及び生徒の回答状況から，参考までに独立性の検定を行った。５％の有意差が認められた内容に*，１％の有意差が認められた内容に**を検定欄に記した。

３　予備調査の結果及び分析

(ｱ) 数学Ⅰ

	教員 肯定群	生徒 肯定群	教員 −生徒	備考	①	②	③	④	検定
1　式の展開	100	94.6	5.4		84.6 59.3	15.4 35.3	0 4.2	0 1.2	**
2　因数分解	92.2	89.9	2.3		60.8 53.8	31.4 36.1	7.8 8.3	0 1.8	
3　絶対値	48.1	68.5	−20.4	A, B	5.8 24.6	42.3 44.0	44.2 26.2	7.7 5.2	**
4　２次方程式の解の個数	96.2	80.4	15.8		55.8 41.2	40.4 39.2	3.8 14.3	0 5.3	*
5　２次関数の最大最小	80.8	76.0	4.8		28.8 34.7	51.9 41.3	19.2 16.7	0 7.3	
6　２次不等式	82.7	79.0	3.7		26.9 35.3	55.8 43.8	15.4 17.5	1.9 3.4	
7　三角比	84.6	76.4	8.2		26.9 31.9	57.7 44.6	11.5 20.0	3.8 3.6	
8　三角比の相互関係	94.2	70.0	24.2	A	42.3 28.0	51.9 41.9	5.8 23.2	0 6.9	**
9　正弦定理・余弦定理	82.7	77.8	4.9		44.2 38.6	38.5 39.2	17.3 16.2	0 6.1	
10　三角形の面積	94.2	77.6	16.6		61.5 44.0	32.7 33.7	5.8 13.5	0 8.9	*
11　面積比と体積比	73.1	65.7	7.4		30.8 28.6	42.3 37.1	25.0 25.4	1.9 8.9	

（注）・肯定群の欄の□は 60%未満，□は 60%以上 70%未満のところである。
・①～④の欄は全体に占める割合で，上段:教員/下段:生徒　である

【３　絶対値】

教員の肯定群の割合が 48.1%と非常に低く，指導しにくい内容であることが分かる。数学Ⅰの中では一番低い結果であった。それに対して，生徒の肯定群の割合は 68.5%とやや低く，やや理解しにくい内容であることが分かる。教員の肯定群の割合より高い結果であったが，「③理解しにくい」と回答している生徒も 26.2%おり，やはり，絶対値は理解しにくい内容であることが分かる。生徒の自由記述から，「場合分けが分からない」「外し方が分からない」等の意見があった。

【８　三角比の相互関係】

教員の肯定群の割合は 94.2%と非常に高く，指導しやすい内容であることが分かる。生徒の肯定群の割合は 70%とやや高く，比較的理解しやすい内容であることが分かる。しかし，「③理解しにくい」と回答している生徒も 23.2%おり，理解しにくいと感じている生徒が少なからずいることが分かる。生徒の自由記述から，「覚える公式が多いこと」や，「公式を使い分けられない」等の意見があった。

特に，$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ の公式が分からないようである。

【11　相似な図形の面積比・体積比】

教員の肯定群の割合は 73.1%とやや高く，比較的指導しやすい内容であることが分かるが，選択肢の「③指導しにくい」と解答している教員が 25.0%もあることから，指導しにくいと感じている教員が少なからずいることが分かる。教員の自由記述からは「体積比が相似比の３乗になるところの説明」が指導しにくいという意見があった。生徒の肯定群の割合は 65.7%とやや低く，比較的理解しにくい内容であることが分かる。生徒の自由記述から，「相似が苦手」「図形が苦手」等の意見があった。

(ｲ) 数学Ａ

	教員 肯定群	生徒 肯定群	教員 －生徒	備考	①	②	③	④	検定
1　要素個数	90.4	75.0	15.4		55.8 33.1	34.6 41.9	7.7 18.5	1.9 6.5	**
2　順列	86.5	64.1	22.4	A	44.2 22.7	42.3 41.4	13.5 26.0	0 9.9	**
3　組合せ	80.8	57.9	22.9	A, C	25.0 19.7	55.8 38.2	19.2 31.5	0 10.6	**
4　確率	82.7	59.1	23.6	A, C	25.0 20.1	57.7 39.0	17.3 28.3	0 12.6	**
5　反復試行	78.8	50.0	28.8	A, C	21.2 16.9	57.7 33.1	21.2 33.3	0 16.7	**
6　期待値	88.5	62.6	25.9	A	40.4 22.0	48.1 40.7	9.6 24.6	1.9 12.8	**

(注)・肯定群の欄の□は60%未満，□は60%以上70%未満のところである。
・①～④の欄は全体に占める割合で，上段:教員/下段:生徒　である

【２　順列】

教員の肯定群の割合は，86.5%と高く，指導しやすい内容であることが分かる。教員の自由記述からは，「Ｐの使い方の説明がしにくい」という意見があった。しかし，生徒の肯定群の割合は 64.1%とやや低く，比較的理解しにくい内容であることが分かる。肯定群の割合の差が 20 ポイントを超えている。生徒の自由記述から，「ＰとＣの記号の使い分け」や，「同じ文字を含んだ順列」「Ｐの公式がうまく使えない」等の意見があった。

【３　組合せ】

教員の肯定群の割合は，80.8%と高く，指導しやすい内容であることが分かる。しかし，生徒の肯定群の割合は 57.9%と低く，理解しにくい内容であることが分かる。肯定群の割合の差が 20 ポイントを超えている。生徒の自由記述から，「ＰとＣの記号の使い分け」や，「同じ文字を含んだ問題」「Ｃの公式がうまく使えない」等の意見があった。

【４　確率】

教員の肯定群の割合は，82.7%と高く，指導しやすい内容であることが分かる。しかし，生徒の肯定群の割合は 59.1%と低く，理解しにくい内容であることが分かる。肯定群の割合の差が 20 ポイントを超えている。生徒の自由記述から，「問題が身近でない」や，「問題文が分かりづらい」「パターン化できない」「掛けるか足すか分からなくなる」「場合分けが難しい」等の意見があった。

【５　反復試行】

教員の肯定群の割合は 78.8%とやや高く，比較的指導しやすい内容であることが分かる。しかし，生徒の肯定群の割合は 50.0%と低く，理解しにくい内容であることが分かる。今回の調査で，意識の差が一番高かった内容である。生徒の自由記述から，「公式でＣが付く意味が分からない」や，「$\bar{p}$ をかけ忘れる」「普通の確率の問題と区別が付きにくい」等の意見があった。

【６　期待値】

教員の肯定群の割合は 88.5%と高く，指導しやすい内容であることが分かる。教員の自由記述では「(確率変数)×(確率)の和」の説明がしにくいという意見があった。生徒の肯定群の割合は 62.6%とやや低く比較的理解しにくい内容であることが分かる。生徒の自由記述からは，「期待値の意味が分かりづらい」「全ての確率変数の確率を求める必要があるなど計算が煩雑」「何に対する期待値か分からない」等の意見があった。

	教員 肯定群	生徒 肯定群	教員 −生徒	備考	①	②	③	④	検定
7　必要十分条件	59.6	43.5	16.1	B, C	17.3 11.2	42.3 32.3	34.6 31.7	5.8 24.8	*
8　背理法	53.8	43.5	10.3	B, C	15.4 12.4	38.5 31.0	30.8 28.1	15.4 28.5	
9　内分と外分	90.4	74.5	15.9		44.2 26.1	46.2 48.4	9.6 20.2	0 5.3	*
10　重心，垂心，外心等	75.0	60.5	14.5		40.4 12.2	34.6 48.3	21.2 29.3	3.8 10.2	**
11　チェバ，メネラウスの定理	53.8	59.0	−5.2	B, C	19.2 21.7	34.6 37.3	32.7 27.1	13.5 14.0	
12　円周角	88.5	73.6	14.9		40.4 35.2	48.1 38.3	11.5 18.9	0 7.6	
13　方べきの定理	86.5	64.9	21.6	A	40.4 24.8	46.2 40.0	13.5 23.2	0 11.9	**

（注）・肯定群の欄の　　は60%未満，　　は60%以上70%未満のところである。
・①～④の欄は全体に占める割合で，上段:教員/下段:生徒　である

【7　必要十分条件】

教員の肯定群の割合は59.6%と低く，指導しにくい内容であることが分かる。生徒の肯定群の割合は 43.5%と非常に低く，かなり理解しにくい内容であることが分かる。生徒の自由記述からは，「意味が分からない」「真偽判定が難しい」「なぜ“必要”“十分”と言うのか」「必要条件と十分条件の区別が付かない」等の意見があった。

【8　背理法】

教員の肯定群の割合は53.8%と低く，指導しにくい内容であることが分かる。教員の自由記述からは，「素晴らしい手法であるが，否定して矛盾を導くところが生徒に理解できない」「対偶との違いの説明がしにくい」という意見があった。生徒の肯定群の割合は43.5%と非常に低く，かなり理解しにくい内容であることが分かる。生徒の自由記述からは，「根本的に考え方が分からない」「答え方が分からない」「使うタイミングが分からない」等の意見があった。

【10　重心，垂心，内心，外心】

教員の肯定群の割合は75.0%とやや高く，比較的指導しやすい内容であることが分かる。教員の自由記述から，「証明問題が多すぎる」等の意見があった。生徒の肯定群の割合は 60.5%と低く，理解しにくい内容であることが分かる。生徒の自由記述からは,「似たものが多すぎてごちゃごちゃになる」等の意見があった。

【11　チェバ・メネラウスの定理】

教員の肯定群の割合は59.6%と低く，指導しにくい内容であることが分かる。教員の自由記述から，「チェバの定理とメネラウスの定理の使い分けの説明が難しい」「メネラウスの定理の使い方の説明が難しい」「証明に時間がかかる」等の意見があった。生徒の肯定群の割合は 59.0%と低く，理解しにくい内容であることが分かる。生徒の自由記述からは，「図形の中でなかなか使えない」「公式が覚えにくい」等の意見があった。

【13　方べきの定理】

教員の肯定群の割合は86.5%と高く，指導しやすい内容であることが分かる。しかし，生徒の肯定群の割合は 64.9%とやや低く，比較的理解しにくい内容であることが分かる。生徒の自由記述から，「定理の使い方が分からない(図に対してうまく適用できない)」「点が円の内部にあるときと外部にあるときとで公式の使い分けが分かりづらい」等の意見があった。

(ｳ) 数学Ⅱ

	教員 肯定群	生徒 肯定群	教員 －生徒	備考	①	②	③	④	検定
1　分数式	98.1	85.6	12.5		50.0	48.1	1.9	0	
					42.8	42.8	10.1	4.3	
2　複素数	94.2	78.8	15.4		55.8	38.5	5.8	0	**
					33.0	45.8	16.6	4.6	
3　解と係数の関係	96.2	82.5	13.7		53.8	42.3	3.8	0	
					43.5	38.9	13.2	4.3	
4　因数定理	92.3	77.3	15.0		48.1	44.2	7.7	0	
					35.3	42.0	15.5	7.2	
5　高次方程式	94.2	75.6	18.6		50.0	44.2	5.8	0	**
					32.1	43.5	17.9	6.5	
6　恒等式	88.5	79.5	9.0		42.3	46.2	11.5	0	
					39.5	40.0	14.0	6.5	
7　不等式の証明	53.8	61.8	−8.0	B	21.2	32.7	44.2	1.9	*
					21.5	40.3	27.8	10.4	
8　直線の方程式	98.1	80.0	18.1		63.5	34.6	1.9	0	**
					34.4	45.7	15.6	4.3	
9　円の方程式	100	77.9	22.1	A	53.8	46.2	0	0	**
					33.9	44.0	15.4	6.7	
10　軌跡	51.9	45.7	6.2	B, C	13.5	38.5	42.3	5.8	
					11.3	34.4	38.2	16.1	
11　領域	80.8	68.5	12.3		32.7	48.1	15.4	3.8	
					26.0	42.5	23.3	8.2	

（注）・肯定群の欄の　　は 60%未満，　　は 60%以上 70%未満のところである。
・①～④の欄は全体に占める割合で，上段:教員/下段:生徒　である

【7　不等式の証明】

教員の肯定群の割合は 53.8%と低く，指導しにくい内容であることが分かる。特に，選択肢の「③指導しにくい」と解答している教員が 44.2%もあり，指導法を検討する必要がある。教員の自由記述から，「証明方法が多く使い方の説明に苦労する」「生徒は証明問題を嫌がる」等の意見があった。生徒の肯定群の割合は 61.8%とやや低く，比較的理解しにくい内容であることが分かる。生徒の自由記述からは，「相加相乗平均の関係を使った証明が分かりづらい」「証明の方法が多くあり方針が立てにくい」等の意見があった。

【9　円の方程式】

教員の肯定群の割合は 100%と全教員指導しやすいと回答している。生徒の肯定群の割合は 77.9%とやや高く，比較的理解しやすい内容であることが分かる。生徒の自由記述からは，「標準形に直す変形ができない」「円の接線に関する問題ができない」等の意見があった。

【10　軌跡】

教員の肯定群の割合は 51.9%と低く，指導しにくい内容であることが分かる。教員の自由記述から，「動点が２つある時の処理の仕方の説明が難しい」「文字処理が難しい」等の意見があった。生徒の肯定群の割合は 45.7%と非常に低く，かなり理解しにくい内容であることが分かる。生徒の自由記述からは，「軌跡の考え方が分かりにくい」「何を x，y とおくのか分からない」「どこに何を代入するのか方針が立たない」等の意見があった。

	教員 肯定群	生徒 肯定群	教員 －生徒	備考	①	②	③	④	検定
12　三角関数のグラフ	59.6	64.4	－4.8	B	21.2 27.6	38.5 36.8	38.5 23.1	1.9 12.5	*
13　三角方程式	63.5	60.1	3.4		19.2 25.2	44.2 34.9	36.5 26.7	0 13.2	*
14　加法定理・２倍角の公式	73.1	58.4	14.7	C	38.5 25.0	34.6 33.4	25.0 26.4	1.9 15.1	*
15　三角関数の合成	75.0	58.8	16.2	C	23.1 25.8	51.9 33.0	21.2 27.7	3.8 13.5	*
16　指数関数	94.2	67.8	26.4	A	44.2 30.8	50.0 37.0	5.8 24.3	0 7.9	**

（注）・肯定群の欄の　は 60%未満，　は 60%以上 70%未満のところである。

・①～④の欄は全体に占める割合で，上段:教員/下段:生徒　である

【12　三角関数のグラフ】

教員の肯定群の割合は 59.6%と低く，指導しにくい内容であることが分かる。教員の自由記述から，「周期が変わったり，平行移動まではいると生徒が混乱する」等の意見があった。生徒の肯定群の割合は 64.4%とやや低く，比較的理解しにくい内容であることが分かる。生徒の自由記述からは，「周期を間違えてしまう」「tan θ のグラフが分かりにくい」等の意見があった。

【13　三角方程式，不等式】

教員の肯定群の割合は 63.5%とやや低く，比較的指導しにくい内容であることが分かる。「③やや指導しにくい」と回答した教員は 36.5%にもなる。教員の自由記述から，「定義範囲の置き換えの指導が難しい」といった意見があった。生徒の肯定群の割合は 60.1%とやや低く，比較的理解しにくい内容であることが分かる。生徒の自由記述からは，「変形の仕方が思いつかない」等の意見があった。

【14　加法定理・２倍角の公式】

教員の肯定群の割合は 73.1%とやや高く，比較的指導しやすい内容であることが分かるが，選択肢の「③指導しにくい」と解答している教員が 25.0%もあることから，指導しにくいと感じている教員が少なからずいることが分かる。教員の自由記述から，「定理の証明が複雑である」といった意見があった。生徒の肯定群の割合は 58.4%と低く，理解しにくい内容であることが分かる。生徒の自由記述からは，「変形の仕方が難しい」「公式を覚えるのが大変である」等の意見があった。

【15　三角関数の合成】

教員の肯定群の割合は 75.0%とやや高く，比較的指導しやすい内容であることが分かるが，選択肢の「③指導しにくい」と解答している教員が 21.2%もあることから，指導しにくいと感じている教員が少なからずいることが分かる。生徒の肯定群の割合は 58.8%と低く，理解しにくい内容であることが分かる。生徒の自由記述からは，「公式を活用できない」「機械的な処理しかできない」等の意見があった。

【16　指数関数】

教員の肯定群の割合は 94.2%と非常に高く，指導しやすい内容であることが分かる。それに対して，生徒の肯定群の割合は 67.8%とやや低く，比較的理解しにくい内容であることが分かる。生徒の自由記述から，「指数法則を間違えてしまう」「指数の方程式，不等式が分かりづらい」「グラフがかけない」等の意見があった。

	教員 肯定群	生徒 肯定群	教員 －生徒	備考	①	②	③	④	検定
17　対数関数	63.5	59.5	4.0	C	30.8 23.6	32.7 35.9	32.7 29.4	3.8 11.1	
18　微分	90.4	81.5	8.9		51.9 42.1	38.5 39.4	5.8 14.7	3.8 3.8	
19　接線の方程式	96.2	70.4	25.8	A	55.8 30.8	40.4 39.7	3.8 22.8	0 6.7	**
20　関数の極大・極小	94.2	76.4	17.8		51.9 34.7	42.3 41.7	5.8 17.3	0 6.3	*
21　方程式への応用	80.8	63.7	17.1		32.7 24.2	48.1 39.5	19.2 28.1	0 8.2	
22　積分	84.6	73.8	10.8		38.5 31.2	46.2 42.5	15.4 19.2	0 7.0	
23　定積分を使った面積	86.5	68.3	18.2		44.2 26.9	42.3 41.3	13.5 23.3	0 8.4	*

（注）・肯定群の欄の　　は 60%未満，　　は 60%以上 70%未満のところである。
・①～④の欄は全体に占める割合で，上段:教員/下段:生徒　である

【17　対数関数】

教員の肯定群の割合は 63.5%とやや低く，比較的指導しにくい内容であることが分かる。教員の自由記述から,「定義や公式を定着させにくい」「数字のイメージをつかませにくい」「桁数を求める問題が指導しにくい」等の意見があった。生徒の肯定群の割合は 59.5%と低く，理解しにくい内容であることが分かる。生徒の自由記述からは,「理解しにくい」「計算が混乱する」「グラフがかけない」等の意見があった。

【19　接線の方程式】

教員の肯定群の割合は 96.2%と非常に高く，指導しやすい内容であることが分かる。生徒の肯定群の割合は 70.4%とやや高く，比較的理解しやすい内容であることが分かる。生徒の自由記述からは,「曲線の外から引く接線を求める問題が分かりづらい」「共通接線の問題が分かりづらい」等の意見があった。

【21　方程式への応用】

教員の肯定群の割合は 80.8%と高く，指導しやすい内容であることが分かる。生徒の肯定群の割合は 63.7%とやや低く，比較的理解しにくい内容であることが分かる。生徒の自由記述からは,「グラフをかくのが大変」等の意見があった。

【23　定積分を使った面積】

教員の肯定群の割合は 86.5%と高く，指導しやすい内容であることが分かる。それに対して，生徒の肯定群の割合は 68.3%とやや低く，比較的理解しにくい内容であることが分かる。生徒の自由記述から,「計算が複雑で間違えやすい」「関数が複雑になるとどちらから引けばいいか分からない」「公式の使い方が分かりづらい」等の意見があった。

(ｴ) 数学Ｂ

	教員 肯定群	生徒 肯定群	教員 －生徒	備考	①	②	③	④	検定
1　等差数列	100	81.8	18.2		70.6 43.8	29.4 38.0	0 13.5	0 4.7	**
2　等比数列	98.0	78.4	19.6		62.7 41.4	35.3 36.9	2.0 16.1	0 5.5	**
3　Σ計算	61.5	61.7	－0.2		26.9 25.6	34.6 36.1	38.5 26.4	0 11.9	*
4　漸化式	48.1	44.1	4.0	B, C	15.4 17.9	32.7 26.1	38.5 29.0	13.5 26.9	
5　数学的帰納法	46.2	47.5	－1.3	B, C	11.5 17.9	34.6 29.6	38.5 23.5	15.4 29.0	*
6　ベクトルの演算	94.1	80.5	13.6		54.9 40.1	39.2 40.4	5.9 13.7	0 5.8	
7　ベクトルの内積	74.5	81.0	－6.5		43.1 38.5	31.4 42.5	23.5 12.4	2.0 6.6	

（注）・肯定群の欄の　　は60％未満，　　は60％以上70％未満のところである。
・①～④の欄は全体に占める割合で，上段:教員/下段:生徒　である

【３　Σ計算】

教員の肯定群の割合は 61.5％とやや低く，比較的指導しにくい内容であることが分かる。「やや指導しにくい」という選択肢③を選択した割合が 38.5％もあった。教員の自由記述から，「公式の説明がしづらい」「公式を覚えることが先行し元々の意味を理解してもらえない」「Σの中に n と k が混在すると指導しにくい」等の意見があった。生徒の肯定群の割合も 61.7％とやや低く，やや理解しにくい内容であることが分かる。生徒の自由記述からは,「Σが出てくると何をしたらいいか分からなくなる」「指数に k があるΣ計算が分かりにくい」等の意見があった。

【４　漸化式】

教員の肯定群の割合は，48.1％と非常に低く，指導しにくい内容であることが分かる。「やや指導しにくい」という選択肢③を選択した割合が 38.5％もあった。最終的にはパターン化して機械的に解を導くことがほとんどであるが，特性方程式の説明など指導しにくい内容があるためと考えられる。生徒の肯定群の割合も 44.1％と低く，多くのパターンを覚える必要があるので理解しにくいようである。生徒の自由記述からは，「何をしたらいいか分からない」「公式の種類が多すぎる」等の意見があった。

【５　数学的帰納法】

教員の肯定群の割合は，46.2％と非常に低く，指導しにくい内容であることが分かる。「やや指導しにくい」という選択肢③を選択した割合が 38.5％もあった。生徒の肯定群の割合も 47.5％と低く，理解しにくい内容であることが分かる。生徒の自由記述からは，「何をしたらいいか分からない」「$n=k$ のとき正しいと仮定して，$n=k+1$ のときの式を証明できない。特に不等式が分からない」等の意見があった。

【7　ベクトルの内積】

教員の肯定群の割合は 74.5％とやや高く，比較的指導しやすい内容であることが分かるが，選択肢の「③指導しにくい」と解答している教員が 23.5％もあることから，指導しにくいと感じている教員が少なからずいることが分かる。生徒の肯定群の割合は 81.0％と高く，理解しやすい内容であることが分かる。

	教員 肯定群	生徒 肯定群	教員 －生徒	備考	①	②	③	④	検定
8　位置ベクトル	76.5	65.6	10.9		31.4 26.1	45.1 39.5	19.6 22.9	3.9 11.5	
9　ベクトルと図形	63.5	55.0	8.5	C	21.2 16.5	42.3 38.5	30.8 25.5	5.8 19.5	
10　ベクトル方程式	44.2	49.9	−5.7	B, C	13.5 13.5	30.8 36.3	32.7 27.1	23.1 23.1	
11　空間ベクトル	51.9	46.0	5.9	B, C	25.0 11.8	26.9 34.1	36.5 30.3	11.5 23.7	*

（注）・肯定群の欄の　　は 60%未満，　　は 60%以上 70%未満のところである

・①～④の欄は全体に占める割合で，上段:教員/下段:生徒　である

【8　位置ベクトル】

教員の肯定群の割合は 76.5%とやや高く，比較的指導しやすい内容であることが分かる。教員の自由記述から,「一般的なベクトルと位置ベクトルの違いをうまく伝えられない」等の意見があった。生徒の肯定群の割合は 65.6%とやや低く，比較的理解しにくい内容であることが分かる。生徒の自由記述からは,「定義がよく分からない」等の意見があった。

【9　ベクトルと図形】

教員の肯定群の割合は 63.5%とやや低く，比較的指導しにくい内容であることが分かる。生徒の肯定群の割合も 55.0%と低く，理解しにくい内容であることが分かる。生徒の自由記述からは,「最初に何をしたらいいか分からない」「図形問題が苦手」等の意見があった。

【10　ベクトル方程式】

教員の肯定群の割合は，44.2%と，今回の調査の中で一番低く,「やや指導しにくい」という選択肢③を選択した割合が 32.7%,「指導しにくい」という選択肢④を選択した割合が 23.1%もあった。生徒の肯定群の割合も 49.9%と低く，理解しにくい内容であることが分かる。生徒の自由記述からは,「何をしたらいいか分からない」「式の意味が分からない」等の意見があった。

【11　空間ベクトル】

教員の肯定群の割合は，51.9%と低く,「やや指導しにくい」という選択肢③を選択した割合が 36.5%もあった。生徒の肯定群の割合も 46.0%と低く，理解しにくい内容であることが分かる。生徒の自由記述からは,「空間を認識できない」「まず何をすればいいか分からない」等の意見があった。

4　本調査について

(1) 本調査の内容

予備調査の結果から絞り込まれた,「教員は指導しやすいが，生徒は理解しにくいと感じている内容」「教員が指導しにくいと感じている内容」「生徒が理解しにくいと感じている内容」を中心にその原因を探るため，さらにアンケート調査(本調査)を行った。調査用紙は以下の方針で作成した。

- 絞り込んだ各内容に関して，指導しにくい(理解しにくい)原因を検討し，考えられる原因を選択肢にする。そのとき，基本的な内容をできるだけ若い番号にする。
- 選択肢には，そのほかに,「その他」「指導しやすい(理解しやすい)」を設ける。
- 回答者は，第１の原因と，第２の原因を選択して，マークカードに記入する。
- 生徒には，性別，文理，数学の好き嫌いについても質問する。

(2) 調査対象

調査対象校　ⅠＡⅡＢを履修している普通科高校のうち 40 校を任意抽出

教員　対象校の数学教員

生徒　対象校で数学ⅠＡⅡＢを履修し終えた生徒 80 名

(3) 調査期間

平成 21 年７月～９月

(4) 調査結果

ア　回答者数

教員　328 名　　　　生徒　2,816 名

イ　処理方法

第１の原因を２点，第２の原因を１点として点数化し，総合計から割合を計算する。

文理別及び数学の好き嫌い別の集計についても同様に処理した。

ウ　分析内容及び分析上の留意事項

以下の内容について分析する。

- 教員と生徒で意識の差が見られるところがどこなのか。
- 教員が指導しにくい内容はどこなのか。
- 生徒が理解しにくい内容はどこなのか。
- 生徒についてはさらに，数学の好き嫌い，文理によってどのような違いが出るか。

ただし，アンケートの解答方法が，第２の原因までを回答するようになっているので，割合が低いところは理解できているというわけではないことに注意する。

エ　指導上の留意点

集計結果及び分析の結果，教員が指導する上で，注意しなければならない事項をまとめる。

オ　具体的な指導法

指導上の留意点でまとめた事項について、具体的な指導方法を提案する。

５　本調査の結果及び分析

(1)　絶対値に関する内容　　　教員が指導しやすい 26.2%，生徒が理解しやすい 44.7%

【教員用質問】

① 絶対値の意味の説明　　② $|a-3|$ などの場合分けの説明

③ $y=|x-2|$ などの関数の説明　　④ $|a-3|<1$ のような不等式の説明

⑤ $|x|+|x-1|$ のように記号が２つ以上使われた式の説明

⑥ その他　　⑨ 指導しやすい

【生徒用質問】

① 絶対値の意味が分からない　　② $|a-3|$ などの場合分けが分からない

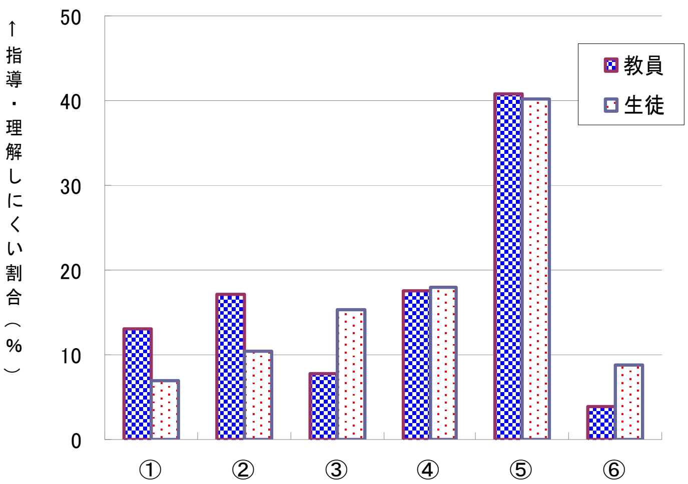
③ $y=|x-2|$ などの関数が分からない　　④ $|a-3|<1$ のような不等式が分からない

⑤ $|x|+|x-1|$ のように記号が２つ以上使われると分からない

⑥ その他　　⑨ 理解しやすい

【集計結果及び分析】

	①	②	③	④	⑤	⑥
教員	13.0%	17.2%	7.7%	17.5%	40.8%	3.8%
生徒	7.0%	10.5%	15.4%	18.0%	40.3%	8.7%



　絶対値に関する内容を「指導しやすい」と回答した教員の割合は 26.2%,「理解しやすい」と回答した生徒の割合は 44.7%であった。生徒は教員が意識するほど理解しにくいとは思っていないようである。

　指導しにくい，理解しにくい内容については，教員，生徒ともに，⑤の絶対値が２つ以上入っている内容のところが 40%以上の高い結果であった。次に特徴が現れたのが④である。絶対値を外してさらに不等式を解かなければならないので，生徒にとっても難しいし，教員にとっても指導しにくい内容のようである。

　意識に差が出たところは，①から③までのところで，①と②は最初の導入のところなので，教員は説明に気を配っているが，それに対して，生徒はそれほど理解しにくいとは感じていないようである。それよりは，③の絶対値の入ったグラフのところで，教員が感じている以上に，生徒は理解しにくいようである。教員は簡単にグラフをかいて説明をしてしまうが，もう少し丁寧に指導する必要がある。この③については，文理別に集計したところ，文系 18.9%，理系 12.3%と一番大きな差が出た。

　数学の好き嫌い別で集計したところ，数学が嫌いな生徒は①から④までを選択している場合が多く，基本的な部分でつまずいていることが分かる。それに対して，数学が好きな生徒は，⑤を選択している場合が多く，基本的な部分は理解しており⑤のような複雑な問題で苦しんでいることが分かる。

【指導上の留意点】

　集計結果から，①，②のような導入や基本部分の説明及び演習の後，グラフの説明を丁寧に行い，

定着を図る必要があることが分かった。機械的に絶対値を外す練習だけではなく，ここでグラフの指導をしておくことによって，視覚的にとらえることができ，理解を深めることができる。また，不等式の問題に関してもグラフを用いた視覚的な説明を付け加えることによって理解を深めることができる。⑤の絶対値が２つ以上入っている内容については以下に紹介する指導法を参考にしていただきたい。

【具体的な指導法の提案】

誤答例

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & (x \geqq 0) \\ -x-1 & (x < 0) \end{cases}$$

$\boxed{\text{その１}}$　**絶対値の場合分けを分かりやすく説明する工夫**

生徒が絶対値を外すとき，右のような誤答をよくする。また，$|2x-1|$，$|1-3x|$のように絶対値の中の式が複雑になると外せなくなる。教科書のまとめの$|x| = \begin{cases} x & (x \geqq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$を以下のようにまとめ直して，活用できるように指導する。

$$|\bigcirc| = \begin{cases} \bigcirc & (\bigcirc \geqq 0) \\ -\bigcirc & (\bigcirc < 0) \end{cases}$$

（例）　｜x−１｜の絶対値を外す場合，$\bigcirc$ の中に x−１ を機械的に代入し，式を立てた後，括弧内の不等式を解く。

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & (x-1 \geqq 0) \\ -\,x-1 & (x-1 < 0) \end{cases}$$

よって，$|x-1| = \begin{cases} x-1 & (x \geqq 1) \\ -(x-1) & (x < 1) \end{cases}$

以下のようなまとめ方も考えられる。

｜正｜＝正　　　｜負｜＝−負

$\boxed{\text{その２}}$　**絶対値が２つ入っている場合の外し方の指導**

（例）$|x+2|+|x-1|$

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & (x \geqq -2) \\ -(x+2) & (x < -2) \end{cases}$$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & (x \geqq 1) \\ -(x-1) & (x < 1) \end{cases}$$

$|x+2|$は−２を境界として絶対値が外れ，$|x-1|$は１を境界として絶対値が外れる。それを表にして並べて書いて，x＜−２，$-2 \leqq x < 1$，$1 \leqq x$で分かれることを認識させる。

	$x<-2$	$-2 \leqq x<1$	$1 \leqq x$
$\lvert x+2\rvert$	$-(x+2)$	$x+2$	
$\lvert x-1\rvert$	$-(x-1)$		$x-1$

$$|x+2|+|x-1| = \begin{cases} x-1+x+2=2x+1 & (1 \leqq x) \\ -(x-1)+x+2=3 & (-2 \leqq x < 1) \\ -(x-1)-(x+2)=-2x-1 & (x < -2) \end{cases}$$

(2) 三角比の相互関係に関する内容　　　　$\boxed{\text{教員が指導しやすい 38.7\%，生徒が理解しやすい 36.9\%}}$

【教員用質問】

① 鈍角の三角比の説明　　② $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に関する説明

③ $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$ に関する説明　　④ $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ に関する説明

⑤ $90^\circ-\theta$ の公式の説明　　⑥ その他

⑨ 指導しやすい

【生徒用質問】

① 鈍角の三角比が分からない　　② $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ が使えない

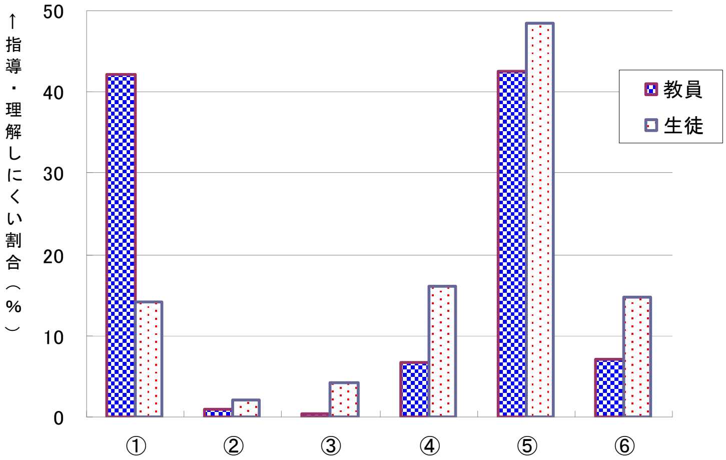
③ $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$ が使えない　　④ $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ が使えない

⑤ $90^\circ-\theta$ の公式が分からない　　⑥ その他

⑨ 理解しやすい

【集計結果及び分析】

	①	②	③	④	⑤	⑥
教員	42.2%	1.0%	0.4%	6.8%	42.6%	7.0%
生徒	14.2%	2.2%	4.3%	16.0%	48.5%	14.7%



三角比の相互関係に関する内容を「指導しやすい」と回答した教員は 38.7%，「理解しやすい」と回答した生徒は 36.9%であった。

この三角比の相互関係のところは，公式が多く，覚えるのも大変で，しかもどの公式を使えばいいか混乱してしまうようである。特に⑤の $90^\circ-\theta$ の公式は，教員も指導しにくいと感じているし，生徒も理解しにくいと感じているようである。

意識の差が大きかったのは，①の鈍角への拡張の部分で，教員は，三角比は直角三角形で導入するから，鈍角への拡張は理解しにくいように思っているようであるが，生徒は教員が感じているほど理解しにくいとは感じていないようである。

次に意識の差が出たのは，④の $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ の公式についてである。教員は，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ の公式の両辺を $\cos^2\theta$ で割ればすぐに，$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ の公式を導けると簡単に思っているが，生徒にとってはそんなに簡単なことではないようである。

数学の好き嫌い別で集計したところ，数学が嫌いな生徒は①から④までを選択している場合が多く，基本的な部分でつまずいていることが分かる。それに対して，数学が好きな生徒は，⑤を選択している場合が多く，基本的な部分は理解しており⑤のような $90^\circ-\theta$ の公式で苦しんでいることが分かる。

【指導上の留意点】

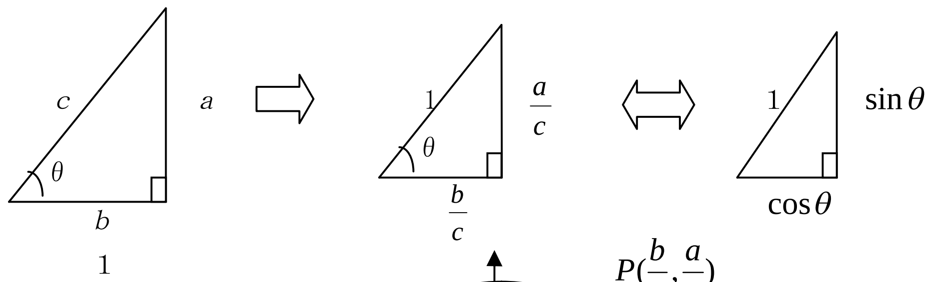
集計結果から，①については，単位円の中に直角三角形を埋め込み，座標と三角比の値が一致という説明を行い，直角三角形からの流れが自然になるような説明が必要である。②，③の公式については，求値問題でよく使うこともあって，定着もよく生徒も理解しているが，④の $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ の公式は思った以上に抵抗があるようなので，公式を使う場面のたびに，公式の導き方を説明したり，

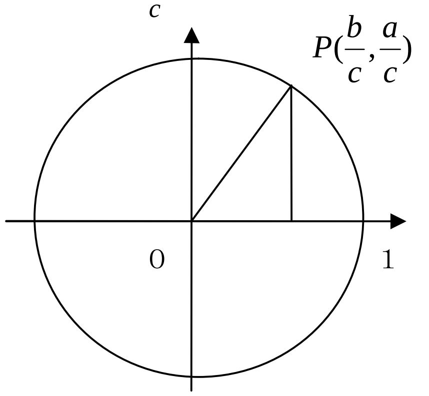
生徒を指名して答えさせる時間をとるほうがよいと思われる。また，⑤の $90^\circ-\theta$ の公式についても，丸暗記させるのではなく，図形と結びつけて視覚的に印象付けるのが効果的であると思われる。

【具体的な指導法の提案】

$\boxed{\text{その１}}$　**単位円の中に直角三角形を埋め込む説明**

単位円の中に直角三角形を埋め込み，座標と三角比の値が一致という説明を行う。





$\boxed{\text{その２}}$　**④の公式を導く指導**

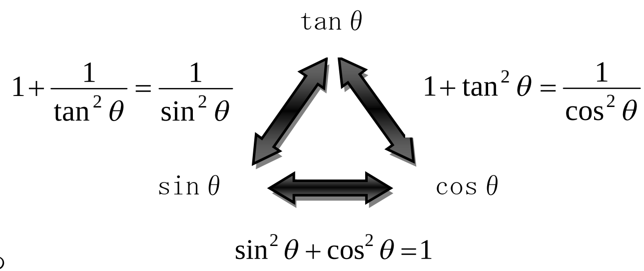
$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ の両辺を $\cos^2\theta$ で割り，

$$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

また，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ の両辺を $\sin^2\theta$ で割り，

$$1+\frac{1}{\tan^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}$$

以上から，右のようにまとめ，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ のどれか１つが分かると，公式をつかって残りの２つを求めることができると説明する。



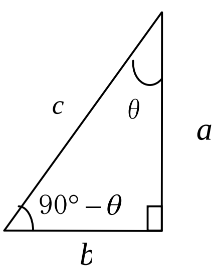
$\boxed{\text{その３}}$　**図形と結びつけて視覚的に覚える指導**

$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$　, $\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$　, $\tan(90^\circ-\theta)=\dfrac{1}{\tan\theta}$

・$90^\circ-\theta$ と θ の三角比はサインとコサインの値は逆（お互い補角の関係）

・タンジェントは傾きなので，$90^\circ-\theta$ と θ のタンジェントは逆数の関係

$\sin(90^\circ-\theta)=\dfrac{a}{c}=\cos\theta$　, $\cos(90^\circ-\theta)=\dfrac{b}{c}=\sin\theta$



$$\tan(90^\circ-\theta)=\frac{a}{b}=\frac{1}{\tan\theta}$$

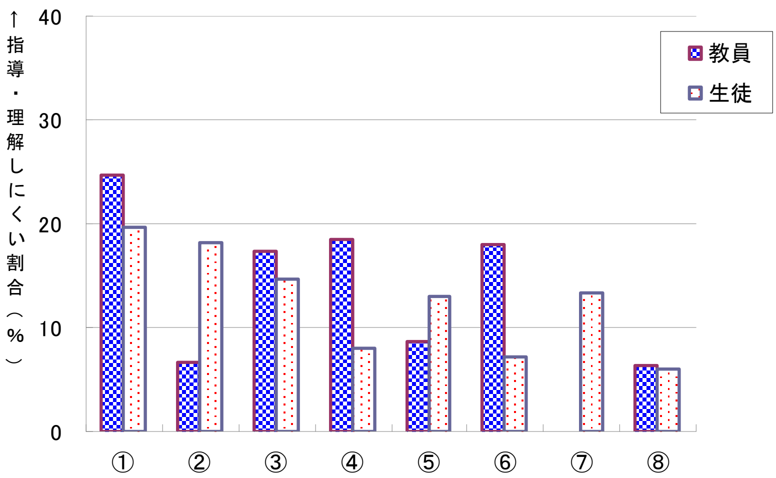
(3) 順列・組合せ・確率に関する内容　教員が指導しやすい 25.6%，生徒が理解しやすい 21.2%

【教員用質問】
① 要素，事象，試行，排反，独立などの用語の説明
② $n(\mathrm{A})$，ϕ，${}_n\mathrm{P}_r$，${}_n\mathrm{C}_r$，$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$ などの記号の説明
③ 順列と組合せの区別　④ 和の法則と積の法則の区別
⑤ 重複順列の説明　⑥ 同じ物を含む順列の説明
⑧ その他
⑨ 指導しやすい

【生徒用質問】
① 要素，事象，試行，排反，独立などの用語の意味を理解していない
② $n(\mathrm{A})$，ϕ，${}_n\mathrm{P}_r$，${}_n\mathrm{C}_r$，$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$ などの記号が使えない
③ 順列と組合せの区別ができない　④ 足す時と掛ける時の区別ができない
⑤ 重複順列が分からない　⑥ 同じ物を含む順列が分からない
⑦ 問題文の意味が読み取れない　⑧ その他
⑨ 理解しやすい

【集計結果及び分析】

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
教員	24.6%	6.6%	17.4%	18.5%	8.6%	18.0%		6.3%
生徒	19.7%	18.1%	14.7%	8.0%	13.0%	7.1%	13.4%	6.0%



順列・組合せ・確率に関する内容を「指導しやすい」と回答した教員は 25.6%，「理解しやすい」と回答した生徒は 21.2%と大きな差は見られないが，共に低い数値である。そして，それぞれ分からないポイントも各項目に分散している。

具体的には，教員，生徒ともに，①の用語については抵抗感があるようで高い値を示している。次に，教員，生徒ともに高い数値を示したのが③の順列と組合わせの区別である。

意識の差についてみてみると，生徒は用語や記号などの基本的なところで抵抗感を感じているのに対して，教員は④の和の法則と積の法則の区別や⑥の同じものを含む順列の説明などが指導しにくいと感じている。特に文系の生徒は①や②の基本的なところを選択しがちで，教員との意識に差がある。

【指導上の留意点】

集計結果から，用語，記号についての説明は，使う度に，教員がその内容をできるだけ確認する努力が必要である。また，この分野は抽象的説明をするより，具体例から説明する方が理解が深まるところなので,様々な問題演習をするなかで,生徒が理解できるよう丁寧に指導することが重要である。特に，順列と組み合わせの区別，和の法則と積の法則の区別については，生徒が混乱しがちなところなので，簡単にさらっと解説するのではなく，区別するポイントなどを付け加えて説明し，生徒の理解を深めさせたい。

また，意味を理解せずに「${}_n\mathrm{P}_r$，${}_n\mathrm{C}_r$ の記号から計算公式」という機械的な対応にならないようにするため，内容理解を優先させて，${}_n\mathrm{P}_r$，${}_n\mathrm{C}_r$ の記号をあえて使わずに文意から計算式を作らせ，解かせるのも一つの方法である。

【具体的な指導法の提案】

その１　順列と組合せの区別

（例）足の速い 10 人の中からリレーの選手４人を選ぶ。次の問いに答えよ。

(1) 走る順番は考えず４人を選ぶ方法は何通りあるか。

（解）順番を考えず４人を選ぶので，10 人から４人を選ぶ組み合わせである。

$$ {}_{10}C_4 = \frac{10!}{4!\times 6!} = \frac{10\times 9\times 8\times 7}{4\times 3\times 2\times 1} = 210 \quad \text{（通り）} $$

(2) 走る順番を考慮しながら４人選ぶ方法は何通りあるか。

（解１）順番を考慮して４人を選ぶので，10 人から４人を選ぶ順列である。

$$ {}_{10}P_4 = 10\times 9\times 8\times 7 = 5040 \quad \text{（通り）} $$

（解２）第１走者の選び方は，10 人から１人選ぶ方法なので，10　（通り）
第２走者の選び方は，９人から１人選ぶ方法なので，９　（通り）
第３走者の選び方は，８人から１人選ぶ方法なので，８　（通り）
第４走者の選び方は，７人から１人選ぶ方法なので，７　（通り）
よって，走る順番を考慮しながら４人選ぶ方法は
$10\times 9\times 8\times 7 = 5040$　（通り）

(3) (1)，(2)の結果から，順列と組み合わせの間にはどのような関係があるか。

（解）（10 人から４人を選ぶ順列）＝（10 人から４人を選ぶ組み合わせ）×（４人の並べ方）

その２　和の法則と積の法則

【積の法則】ある事柄Ａの起こり方が m 通り、**その１つ１つの場合において**、ある事柄Ｂの起こり方が n 通りある場合，Ａの事柄と，Ｂの事柄がともに起こる場合の数は，$m\times n$ 通りである。

【和の法則】ある事柄Ａと，ある事柄Ｂは**同時に起こらない場合**，ある事柄Ａの起こり方が m 通り，ある事柄Ｂの起こり方が n 通りある場合，Ａの事柄**または**Ｂの事柄が起こる場合の数は，$m+n$ 通りである。

解説をするときに，和の法則，積の法則になる理由を必ず付け加える。

（例）大小２つのサイコロを投げ，出た目の数の積が偶数となる場合は何通りか。

（解 1）積が奇数となる場合は，（大，小）＝（奇数，奇数）の場合で，**大きいさいころのそれぞれ奇数の目の出方に対して，小さいさいころの目の出方は３通りずつある。よって，積の法則より**，3×3＝9 通り。よって，出た目の数の積が偶数となる場合は 36－9＝27（通り）

（解 2）（ⅰ）（大，小）＝（偶数，奇数）の場合，3×3＝9 通り（積の法則）
（ⅱ）（大，小）＝（奇数，偶数）の場合，3×3＝9 通り（積の法則）
（ⅲ）（大，小）＝（偶数，偶数）の場合，3×3＝9 通り（積の法則）
出た目の数の積が偶数となる場合は（ⅰ）～（ⅲ）の場合で，**（ⅰ）～（ⅲ）は同時には起こらないので，和の法則より**，9＋9＋9＝27（通り）

その３　同じものを含む順列

（例）赤玉３個，白玉４個を横１列に並べる方法は何通りか。

（順列の考え）赤玉３個と白玉４個が区別できるとすると，7!通りの並べ方がある。
赤３個，白４個の区別の付け方は 3!×4!通りだから，並べる方法は $\dfrac{7!}{3!\cdot 4!}$＝35 通り

（組合せの考え）

左７箇所のうち３箇所選んで赤３個を入れる入れ方と同じ。

${}_7C_3 = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}$＝35 通り　これは，${}_7C_3 = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \dfrac{7!}{3!4!}$ となり，順列の考えと式として同じ。（公式 ${}_nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ の確認）

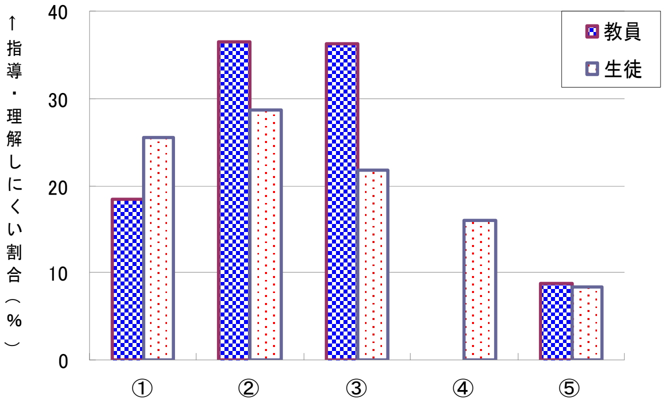
(4) 反復試行に関する内容　　　　　　　　　教員が指導しやすい 46.0%，生徒が理解しやすい 33.1%

【教員用質問】
① 反復試行の意味・内容の説明　　　　② 反復試行と他の確率の違い
③ ${}_n\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{3}\right)^r\left(\frac{2}{3}\right)^{n-r}$ の説明
⑤ その他　　　　　　　　　　　　　　⑨ 指導しやすい

【生徒用質問】
① 反復試行の意味・内容が分からない ② 反復試行と他の確率の違いが分からない
③ ${}_n\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{3}\right)^r\left(\frac{2}{3}\right)^{n-r}$ の意味が分からない ④ 問題文の意味が読み取れない
⑤ その他　　　　　　　　　　　　　　⑨ 理解しやすい

【集計結果及び分析】

	①	②	③	④	⑤
教員	18.4%	36.5%	36.3%		8.8%
生徒	25.4%	28.7%	21.7%	16.0%	8.3%



反復試行に関する内容で，「指導しやすい」と回答した教員は 46.0%，「理解しやすい」と回答した生徒は 33.1%と開きがある。すなわち教員は指導しやすいが，生徒は理解しにくいと思っている。

指導しにくい，理解しにくい内容についてみると，教員，生徒ともに，②の反復試行と他の確率の区別のところが指導しにくい，理解しにくいと回答している。

意識の差が出たのは，教員は②の反復試行と他の確率の区別，③の公式の意味の説明が指導しにくいと思っているのに対して，生徒は，①，②の基本的な部分で理解しにくいと感じている。③の公式 ${}_n\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{3}\right)^r\left(\frac{2}{3}\right)^{n-r}$ の意味のところで 15 ポイント近く差が出たが，文系の生徒を中心に①，②が多く選択されたため，表面的に③が低くなっているが，やはり，理解しにくいポイントであると考えた方がよいと思われる。

【指導上の留意点】

集計結果から，①，②の導入部分を丁寧に説明する必要がある。特に②の反復試行と他の確率との区別については，問題を解くたびに，同じ試行の繰り返しが反復試行であることを強調し，混乱しないように指導していく必要がある。

また，③の公式 ${}_n\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{3}\right)^r\left(\frac{2}{3}\right)^{n-r}$ の説明のところは，${}_n\mathrm{C}_r$ となる意味や $\overline{p}$ をかける意味を分かりやすく説明するべきであろう。

【具体的な指導法の提案】

その１　おこる事象（場合）を具体的に書き出す説明

（例）サイコロを５回振って「１または３」の目が２回出る確率を次の手順で求める。

(1) 次の表で，「１，３」の目が出る場合を「○」，それ以外（「２，４，５，６」）が出る場合を「×」とし，表の１回目から５回目の欄に○，×を記入しなさい。また，確率を計算しなさい。

１回目	２回目	３回目	４回目	５回目	確率の計算式	確率
○	○	×	×	×	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3$
○	×	○	×	×	$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3$
○	×	×	○	×	$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3$
○	×	×	×	○	$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3$
×	○	○	×	×	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3$
×	○	×	○	×	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3$
×	○	×	×	○	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3$
×	×	○	○	×	$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3$
×	×	○	×	○	$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3$
×	×	×	○	○	$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3$

(2) (1)の表で，○，×の入れ方を計算で求める方法を考えなさい。

（解）　５カ所のうち○を記入する場所の選び方は，５カ所から２カ所選ぶ組み合わせだから，

$${}_5C_2=\frac{5!}{2!\times 3!}=10 \quad \text{（通り）}$$

(3) サイコロを５回振って「１または３」の目が２回出る確率を求めなさい。

$${}_5C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{5!}{2!\times 3!}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=10\times\frac{8}{243}=\frac{80}{243}$$

その２　$\bar{p}$に関する指導

以下のように指導する方法もある。

（例）サイコロを５回振って「１または３」の目が２回出る確率を求めよ。

（解）　５回のうち，「１または３」の目が出る場所の選び方は${}_5C_2$通りで，その確率は$\left(\frac{1}{3}\right)^2$

それ以外の目が出る場所の選び方は${}_3C_3$通りで，その確率は$\left(\frac{2}{3}\right)^3$

従って，サイコロを５回振って「１または３」の目が２回出る確率は，${}_5C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\times{}_3C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{80}{243}$

（例）サイコロを６回振って「１」が１回，「２または３」が２回，「４以上」が３回出る確率を求めよ。

（解）　${}_6C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\times{}_5C_2\left(\frac{2}{6}\right)^2\times{}_3C_3\left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{5}{36}$

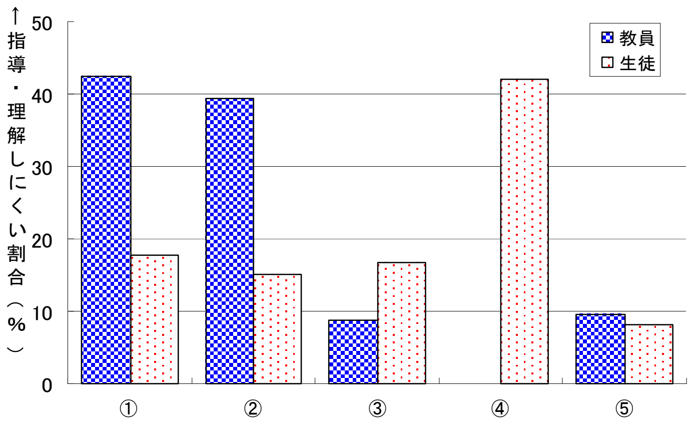
(5) 期待値に関する内容　　教員が指導しやすい 53.7%，生徒が理解しやすい 39.7%

【教員用質問】
① 期待値の意味の説明　　② 何に対する期待値か
③ 計算の仕方の説明
⑤ その他　　⑨ 指導しやすい

【生徒用質問】
① 期待値の意味が分からない　　② 何に対する期待値か分からない
③ 計算の仕方が分からない　　④ 計算が大変
⑤ その他　　⑨ 理解しやすい

【集計結果及び分析】

	①	②	③	④	⑤
教員	42.4%	39.4%	8.7%		9.5%
生徒	17.8%	15.2%	16.8%	42.0%	8.2%



「指導しやすい」と回答した教員53.7%,「理解しやすい」と回答した生徒39.7%と開きがある（この教員の割合は今回の調査項目 24 項目中２番目に高い)。具体的には,「①期待値の意味の説明」「②何に対する期待値か」が指導しにくいと答えた教員が合わせて 82.8%いるのに対して,「①期待値の意味が分からない」「②何に対する期待値か分からない」と答えた生徒は 33.0%しかいない。生徒で多いのは「④計算が大変」で 42.0%と突出している。教員が「期待値の意味が分からないのでは」と思いながら教えているのに対し，生徒はとにかく“計算が大変だ”と感じている。計算力の不足が言われて久しいが，なかなか計算が合わなくて苦しんでいる生徒の様子が分かる。

また，数学の好き嫌いによる違いについての調査結果では,「数学が好き」と回答した生徒で「理解しやすい」と回答した生徒は 45.5%,「数学が嫌い」と回答した生徒で「理解しやすい」と回答した生徒は 31.0%と，15%程度の差が見られた。文理別による違いについても調べたが，有意差は見られなかった。

【指導上の留意点】

このアンケート結果から，留意すべきは「計算の大変さ」である。なるべく計算の煩雑さを避け，いかに計算間違いをおこさず（あるいはおこしても気付いて）結果にたどり着くかに力点を置いて指導していきたい。

さらによくある生徒の質問として，期待値を求めるときに「確率変数と確率をかける理由」「何をしていいか分からない生徒」へのアドバイスも以下でまとめた。

【具体的な指導法の提案】

その１　期待値を求めるときに確率変数と確率をかける理由

平均＝期待値であることを示すとよい。生徒になじみの深い「テストの平均点」を例にあげる。

（例）テスト結果　10 人のテストの点数がそれぞれ 100 点 1 人，80 点 2 人，60 点 3 人，40 点 4 人のとき

$$（平均点）=\frac{100\times1+80\times2+60\times3+40\times4}{10}=60\ (点)$$

$$（期待値）=100\times\frac{1}{10}+80\times\frac{2}{10}+60\times\frac{3}{10}+40\times\frac{4}{10}=60\ (点)$$

その２　期待値を求める問題で何をしていいか分からない生徒に対して

問題文が「〇〇の期待値を求めよ」となっているので，〇〇を確率変数 X とおくよう指導する。その X に関して表をつくる。

X のとりうる可能性のある値をすべて記入

X	○　○　○
確率	

その３　計算の煩雑さを避ける工夫

（例）袋の中に赤玉４個，白玉２個ある。袋から同時に２個の玉を取り出すとき，赤玉の出る個数 X の期待値を求めよ。

（解答）X＝２のとき，確率は，$P(\mathrm{X}=2)=\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}=\frac{6}{15}$，

X＝１のとき，確率は，$P(\mathrm{X}=1)=\frac{{}_4C_1\,{}_2C_1}{{}_6C_2}=\frac{8}{15}$，

X＝０のとき，確率は，$P(\mathrm{X}=0)=\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{15}$，

X に関する確率分布表は

X	0	1	2	計
$P(\mathrm{X})$	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{6}{15}$	1

期待値は

$$E(X)=0\times\frac{1}{15}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{6}{15}=\frac{20}{15}=\frac{4}{3}\quad（個）$$

期待値を求めるときに，計算の煩雑さを避ける工夫として，確率の分母を揃えておくことが上げられる。約分ができても約分をしない。また X＝０のときの確率は求める必要がないけれども，求めておくことで確率の合計が１になることが確認でき，計算間違いを防止できる。

また，一つ一つの確率を求めるのが煩雑な問題も多い。その場合，先ほどのような計算間違いのチェックはできないが，確率の合計が１になることを使って，残り１つの確率を求めるとよい。

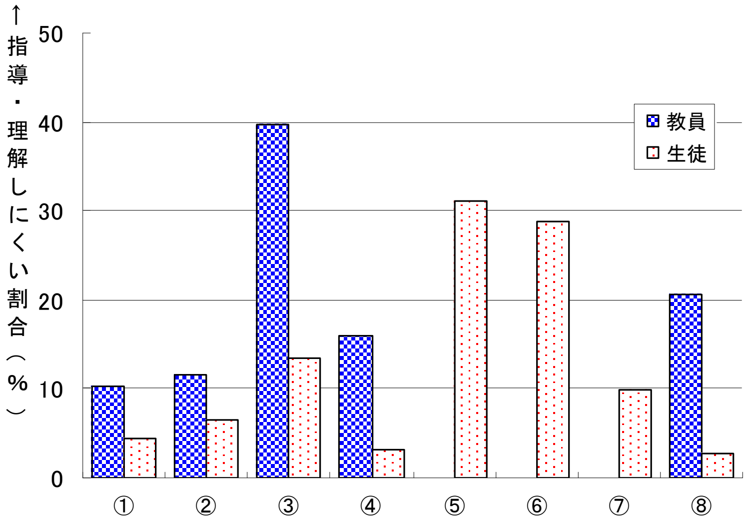
(6) 重心・外心・垂心・内心　　教員が指導しやすい 58.2%，生徒が理解しやすい 14.9%

【教員用質問】
① 重心の説明　　② 外心の説明
③ 垂心の説明　　④ 内心の説明
⑧ その他　　⑨ 指導しやすい

【生徒用質問】
① 重心が分かりにくい　　② 外心が分かりにくい
③ 垂心が分かりにくい　　④ 内心が分かりにくい
⑤ 定義を忘れてしまう　　⑥ 定義を混同してしまう
⑦ 何をしていいか分からない
⑧ その他　　⑨ 理解しやすい

【集計結果及び分析】

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
教員	10.3%	11.5%	39.7%	16.1%				20.6%
生徒	4.4%	6.5%	13.4%	3.2%	31.1%	28.8%	9.9%	2.8%

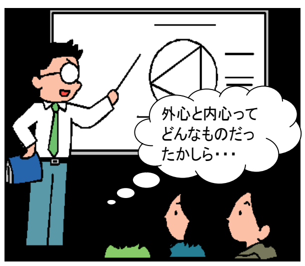


「指導しやすい」と答えた教員 58.2%「理解しやすい」と答えた生徒 14.9%と，意識に大きな開きがある。今回の調査では 24 項目中「理解しやすい」と答えた生徒の割合が最も低い。逆に「指導しやすい」と答えた教員の割合は最も高く，生徒と教員の意識の差が最大の分野である。教員はこの生徒との意識のギャップに配慮しながら，指導にあたる必要がある。

グラフで分かるように，生徒は「⑤定義を忘れてしまう」「⑥定義を混同してしまう」という意見が非常に多く，合わせて 59.9%である。教員は，“定着させる”ため混同しない工夫が必要である。

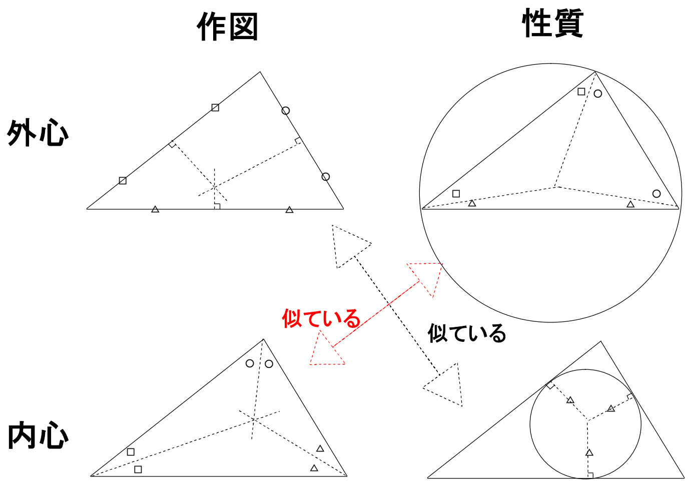
次に教員の意識については，重心・外心・垂心・内心のうち特に垂心が指導しにくいと感じている。垂心は図形的性質としても「垂線の交点」というぐらいで広がりが少ない。平面図形以外の分野では三角比で重心・外心・内心は扱うが垂心はほぼ扱うことがない。ただ平面ベクトルの分野で（ベクトルの内積）＝０の例として垂心を扱っている教科書もある。また，教員のその他が多いのは，平面図形全般における証明の煩雑さと生徒の定着の悪さからではなかろうか。

また，数学の好き嫌いによる違いについての調査結果では，「数学が好き」と回答した生徒で「理解しやすい」と回答した生徒は 18.8%，「数学が嫌い」と回答した生徒で「理解しやすい」と回答した生徒は 8.8%と，10%の差が見られた。嫌いである生徒の割合 8.8%は「軌跡」分野の嫌いである生徒の割合 8.6%に次いで低い。また，嫌いな生徒は好きな生徒に比べ「定義を忘れてしまう」「何をしていいか分からない」と答えた生徒の割合が高い。文理別による違いについては，有意差は見られなかった。



【指導上の留意点】

重心・外心・垂心・内心のうち，重心は中学校で先行して学習するため，「三角形の頂点と，向かい合った各辺の中点とを結ぶ」とか「中線は１：２に内分する点で交わる」については比較的定着がよい。しかし，内心と外心は，作図方法や性質に出てくるキーワードが“２等分”と“垂直”なので混同しやすいと思われる（右図で分かるように図の見た目のイメージで“似ている”と感じてしまう)。また，内心と外心を，“三角形に対して内接する円の中心”，“三角形に対して外接する円の中心”と捉えるところを，円に対して三角形が内側なのか外側なのかと，間違えて覚えてしまう生徒がいるので注意を要する。



【具体的な指導法の提案】

定義・性質を理解させ，定着させるためには

① 生徒自身に正確に図を描かせる。

② 三角形を紙で作り，実際に折り紙をして重心，外心，内心，垂心を印象付けたり，作図を通して性質の確認をするなど，体験学習を取り入れる。

③ 以下のような公式，定理についてまとめ，繰り返し利用していく中で定着させていく。

以上３点が大切であろう。

また【指導上の留意点】に挙げた混同しやすい点を意識して指導するとよい。

最後に性質についてまとめておく。

重心：中線の交点。

重心は各中線を２：１に内分する。

$A(a_1,a_2), B(b_1,b_2), C(c_1,c_2)$ のとき，重心の座標は

$$G\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}, \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$$

外心：外接円の中心。各辺の垂直二等分線の交点。外心は３つの頂点から等距離にある。

外接円の半径を R とすると，正弦定理は $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

内心：内接円の中心。各角の二等分線の交点。内心は各辺から等距離にある。

内接円の半径を r とすると面積 $S=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$

垂心：各頂点から対辺またはその延長上に下ろした垂線の交点。

重心・外心・垂心・内心に傍心（傍接円の中心）を加えたものを三角形の五心という。

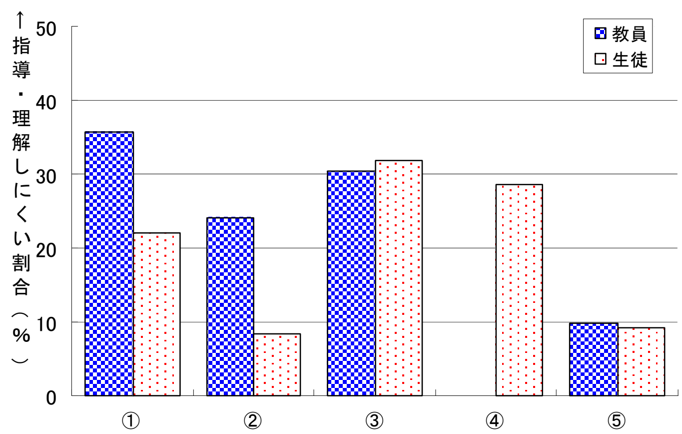
(7)必要十分　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　教員が指導しやすい 31.4%，生徒が理解しやすい 26.5%

【教員用質問】
① $p \Rightarrow q$ が真のとき，どちらが何条件になるかの説明
② $p \Rightarrow q$，$q \Rightarrow p$ の両方の真偽を調べる理由の説明
③ 「命題の真偽」と「集合の包含関係」の対応の説明
⑤ その他　　　　　　　　　　　　　⑨ 指導しやすい

【生徒用質問】
① $p \Rightarrow q$ が真のとき，どちらが何条件になるか分からない
② なぜ $p \Rightarrow q$，$q \Rightarrow p$ の両方の真偽を調べるか分からない
③ 「命題の真偽」と「集合の包含関係」が結びつかない
④ 真偽の判定ができない
⑤ その他　　　　　　　　　　　　　⑨ 理解しやすい

【集計結果及び分析】

	①	②	③	④	⑤
教員	35.7%	24.1%	30.3%		9.9%
生徒	22.1%	8.4%	31.9%	28.5%	9.1%

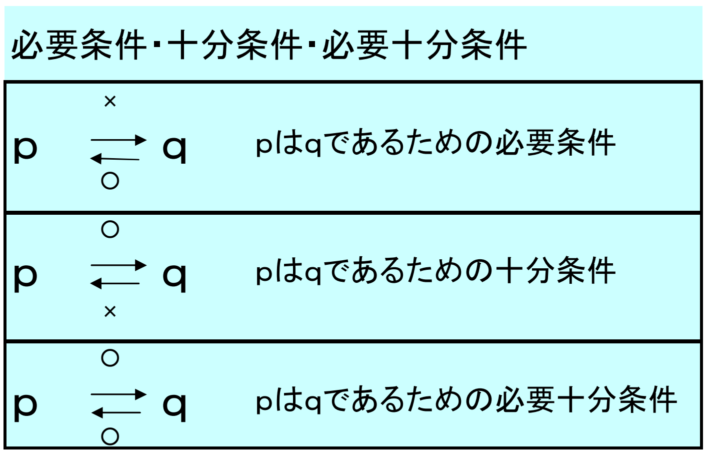


「指導しやすい」と答えた教員 31.4%,「理解しやすい」と答えた生徒 26.5%と，ともに割合は低いが，差は５％以内に収まっており比較的意識の差は少ない分野である。

文理別の調査結果では「① $p \Rightarrow q$ が真のとき，どちらが何条件になるか分からない」と答えた生徒は理系の生徒の方が７％高く「④真偽の判定ができない」と答えた生徒は文系の方が８％高いという興味深い結果が出た。数学の好きな生徒と嫌いな生徒では，設問ごとの回答ではほとんど差が見られなかった。

【指導上の留意点】

理解しにくいと答えた生徒の中には，大きく分けて２通りあると思われる。一つは必要条件・十分条件（p は q であるための何条件か）の定義や集合との関係が分かっていない。そしてもう一つは必要条件・十分条件については理解しているものの，真偽の判定ができないという２通りである。後者については，この分野が理解不足なわけではない。いわゆる論証が不得手なだけである。教員が設問ごとに丁寧な解説を心掛けていくべきであろう。



【具体的な指導法の提案】

「$p \Rightarrow q$ が真のとき，どちらが何条件になるか」や「命題の真偽」と「集合の包含関係」の対応の説明については，教員の中でも様々な工夫がなされていることと思う。生徒は「十分（sufficient)」

「必要（necessary)」という言葉のイメージから，集合に関して正しい意味とは逆の「十分＝広い・緩い」「必要＝狭い・厳しい」という感覚をもつものがいる。実際には，十分条件に当たる部分が集合としては狭く，必要条件に当たる部分が集合としては広いことに注意させたい。具体的には数直線を書いたり，ベン図を作ったりしながら包含関係を確認させていくことが重要である。

命題	p	⇒	q	が真のとき
集合	P	⊂	Q	が成立。

命題	p	⇐	q	が真のとき
集合	P	⊃	Q	が成立。

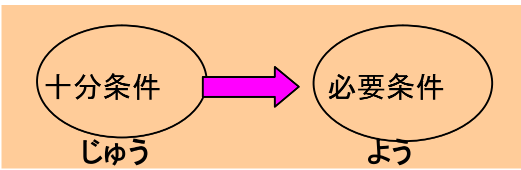
教員間の話の中で出てきた様々な指導の工夫例

その１　磁石のＮ極Ｓ極に例えて。
方位磁石は北に矢印の先があるから。

十分（sufficient) ⇒ 必要（necessary)

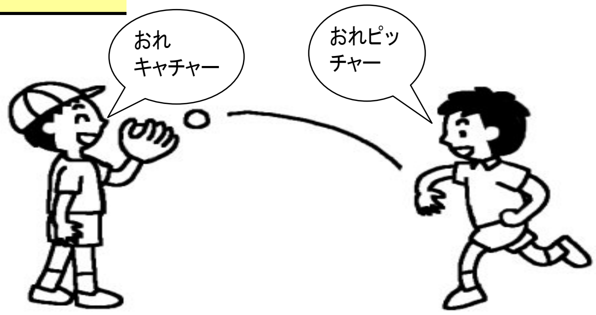
その２　「矢の先は必要」と覚える。
弓矢には矢の先が必要だから，命題が真であるとき，命題Ｐ→Ｑの矢の先が必要条件。

その３　十分条件（じゅう）→必要条件（よう）だから矢印の向きに **じゅう→よう**　と覚えて使う。



その４　条件文はよくＰとＱという文字を用いる。Ｐをピッチャー，Ｑをキャッチャーに例えて。

命題	p	⇒	q	が真のとき
	ピッチャー（おれ一人で十分）		キャッチャー（おれも必要だ）	
集合	P	⊂	Q	が成立。



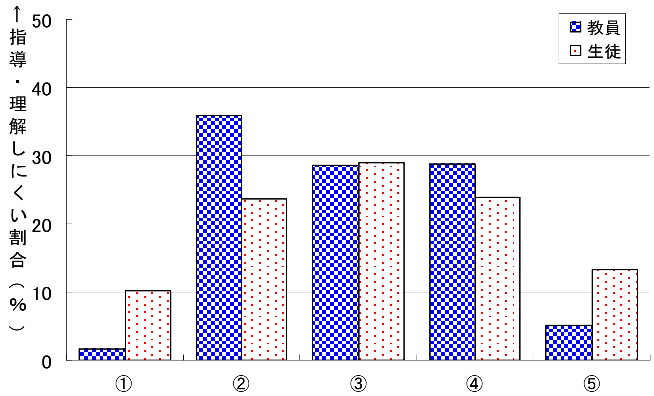
(8) 内分外分　　　　　　　　　　　　　　　　教員が指導しやすい 43.9%，生徒が理解しやすい 55.7%

【教員用質問】
① 内分の説明　　　　　　② 外分の説明
③ 外分点の図示の仕方の説明　　④ 図から外分比を求める方法の説明
⑤ その他　　　　　　　　⑨ 指導しやすい

【生徒用質問】
① 内分，外分両方分からない　　② 内分は分かるが，外分が分からない
③ 外分点を図示できない　　　　④ 図から外分の比が答えられない
⑤ その他　　　　　　　　　　　⑨ 理解しやすい

【集計結果及び分析】

	①	②	③	④	⑤
教員	1.7%	35.8%	28.6%	28.8%	5.1%
生徒	10.3%	23.7%	29.0%	23.9%	13.2%



今回の調査では 24 項目中「**理解しやすい」と答えた生徒の割合が最も高い**。グラフから外分については理解していない生徒も多く，また教員も外分について教えづらいと感じている。

数学の好き嫌いでは「理解しやすい」と答えた生徒の割合が，好きと答えた生徒では 63.5%，嫌いと答えた生徒では 43.6%と２割近く開きがある。外分の理解にかなり違いがあることが分かる。

【指導上の留意点】

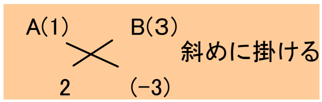
外分は，**数値**に関しては，線分を $m : n$ に外分するということを，$m : (-n)$ に分ける点とし，内分と同様に計算すればよい。(m，n の大小を考えて小さい方にマイナスを付けるよう指導してもよい。) 次に**図示**についてであるが，線分ＡＢを $m : n$ に外分するとき m と n の大小で線分ＡＢの右側か左側のどちらに出るかが変わる。この工夫点については以下で述べる。

【具体的な指導法の提案】

（例）Ａ(1)，Ｂ(3)のとき，線分ＡＢを２:３に外分する点の座標を求め，図示せよ。

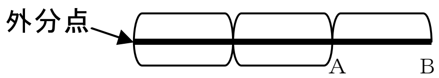
（解答）**座標**　線分ＡＢを２:（−3）に分ける点だから，$\dfrac{1\times(-3)+3\times2}{2+(-3)}=-3$

（線分ＡＢを(−2)：3 に分ける点としてもよい）

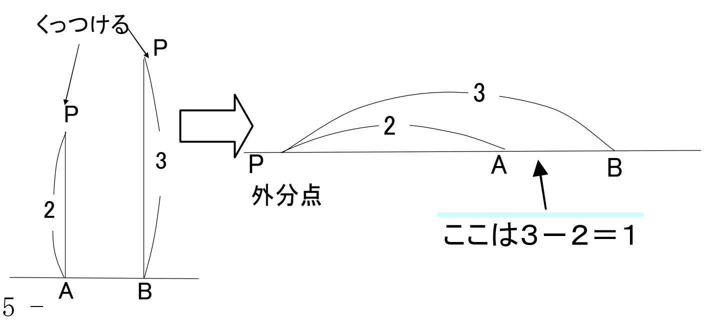


図示

$\boxed{\text{その１}}$ Ａから２だけ出発し３戻ったところがＢであり，その折り返し地点が外分点。



$\boxed{\text{その２}}$ 　ＡとＢに長さの比が２：３の柔らかい棒を立て，先をくっつけると外分点がとれる。



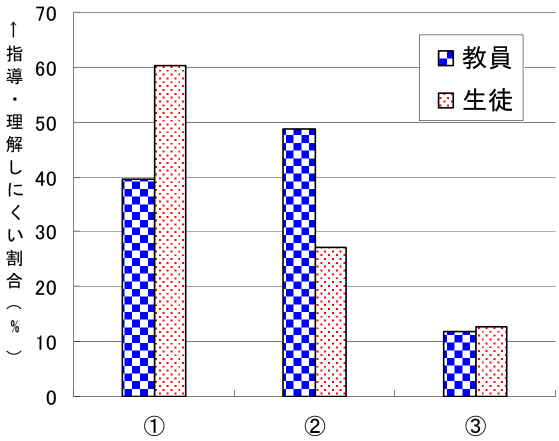
(9) 方べきの定理に関する内容　　　　　　　教員が指導しやすい 46.3%，生徒が理解しやすい 41.3%

【教員用質問】
① 方べきの定理の説明　　　　　　　② 方べきの定理の使い方の説明
③ その他　　　　　　　　　　　　　⑨ 指導しやすい

【生徒用質問】
① 方べきの定理を覚えていない　　　② 方べきの定理の使い方が分からない
③ その他　　　　　　　　　　　　　⑨ 理解しやすい

【集計結果及び分析】

	①	②	③
教員	39.6%	48.7%	11.7%
生徒	60.2%	27.2%	12.7%



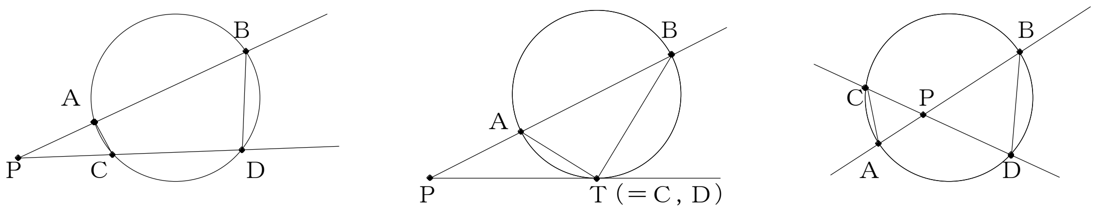
方べきの定理に関する内容で「指導しやすい」と回答した教員は 46.3%，「理解しやすい」と回答した生徒は 41.3%であった。比較的易しい分野であると思われる。

「指導しにくい」と答えた教員のうち約半数が「②方べきの定理の使い方の説明」であるのに対し，「理解しにくい」と答えた生徒の６割が「①方べきの定理を覚えていない」と答えている。この傾向は，数学の好き嫌いや類型別で見ても同じである。教員は使い方の指導法に関心が高いようだが，生徒の方はその前の段階で，定理そのものを覚えていないことが分かる。

【指導上の留意点】

簡単な式なので，丸暗記させることは難しくはないが，それでは生徒はすぐに忘れてしまう。単に覚えさせるのではなく，生徒の印象に残るような導入方法を工夫する必要がある。その際，中学校の履修範囲である円周角や接弦定理についても再度確認しながら，証明をさせるとよい。

【具体的な指導法の提案】



円に対する点Ｐの位置にかかわらず，△ＰＡＣ∽△ＰＤＢであることに注目させる。
相似比より　ＰＡ：ＰＣ＝ＰＤ：ＰＢ　だから　ＰＡ・ＰＢ＝ＰＣ・ＰＤ（＝ＰＴ^2）となる過程をしっかりと印象付けたい。常に交点Ｐからの距離を考えることも強調するとよい。

円上で２直線を動かしながら，ＰＡ・ＰＢとＰＣ・ＰＤの値が常に同じように変化するところをコンピュータで見せることもできる。証明では理解できない生徒にも式の意味は伝わる。

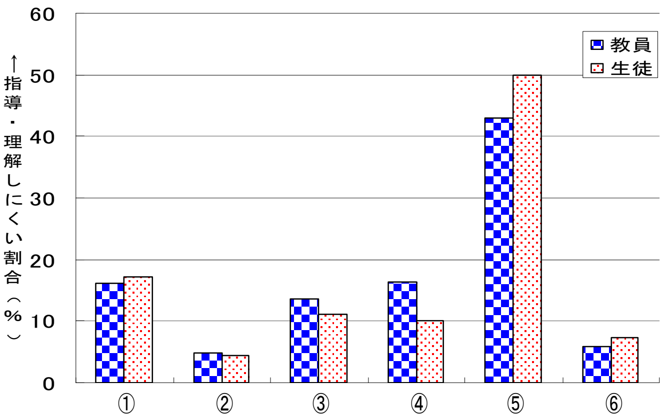
(10) 不等式の証明に関する内容　　教員が指導しやすい 30.8%，生徒が理解しやすい 26.1%

【教員用質問】
① 不等式の証明の説明
② (左辺)－(右辺)＝ と変形して証明する方法の説明
③ 等号成立の場合についての説明
④ (左辺)^2－(右辺)^{2}と変形して証明する方法の説明
⑤ 相加平均･相乗平均の関係を使った証明の説明
⑥ その他　　⑨ 指導しやすい

【生徒用質問】
① 何を証明したらいいか分からない
② (左辺)－(右辺)＝ として変形していくことが分からない
③ 等号成立の場合が分からない
④ (左辺)^2－(右辺)^{2}として証明することが分からない
⑤ 相加平均･相乗平均の関係を使った証明ができない
⑥ その他　　⑨ 理解しやすい

【集計結果及び分析】

	①	②	③	④	⑤	⑥
教員	16.2%	4.8%	13.6%	16.4%	43.0%	5.9%
生徒	17.3%	4.3%	11.1%	10.1%	49.9%	7.3%



不等式の証明に関する内容で，「指導しやすい」と回答した教員は 30.1%，「理解しやすい」と回答した生徒は 26.1%で，ともに低い結果であった。

具体的には，「⑤相加平均・相乗平均の関係」は「理解しにくい」と答えた生徒の約半数が選択しており，教員も「指導しにくい」うちの４割以上を占めている。続いて生徒の上位は「①何を証明したらいいか分からない」「③等号成立」と続く。どちらも数学の好き嫌い別で集計すると，数学が嫌いな生徒の方が「理解しにくい」と答える率がやや上回った。文理別で集計すると，文系の生徒の方が「理解しにくい」と答える率がやや上回った。

【指導上の留意点】

不等式の証明の基本は，(左辺)－(右辺)＞0 （または≥0）を示すことである。この後の単元やグラフを用いた証明でも必要な概念であるのでしっかり定着させたい。その際，式を工夫して変形することがあり，「理解しにくい」生徒にとって「①何を証明したらいいか分からない」にもつながると思われる。

一方，相加平均・相乗平均の関係を用いる証明では，(左辺)－(右辺)を行わない。相加平均・相乗平均の関係自体は (左辺)^2－(右辺)^2≧０で示すことが多く，同じ単元で学習するが，全く違う論法であることを意識させ，二つの方法を混同しないよう，はっきり区別して指導するとよい。

また，証明そのものが理解できない生徒は，等号・不等号の使い方に精通していない場合も多く，まずは正しく式変形を書くところから指導すべきである。

【具体的な指導法の提案】

その１　**a,b が実数のとき，$a^2+ab+b^2 \geq 0$ の証明例**

不等式の証明では，なぜ，そのように式変形するかという疑問を持つ生徒も多い。同じ不等式で式変形を何通りも見せることで，$(\text{実数})^2+(\text{実数})^2 \geq 0$ や $(\text{実数})^2+(\text{正の数})>0$ のコツをつかませたい。

(1)　$(\text{左辺})=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{b^2}{4}$

(2)　$(\text{左辺})=\frac{1}{2}\left(2a^2+2ab+2b^2\right)=\frac{1}{2}\left\{(a+b)^2+a^2+b^2\right\}$

(3)　ｉ）　$ab \geq 0$ のとき　$(\text{左辺})=(a-b)^2+3ab$

　　ⅱ）　$ab<0$ のとき　$(\text{左辺})=(a+b)^2-ab$

その２　**相加平均・相乗平均・調和平均について**

(1)　「倍数の平均」は相乗平均で考える。

（例）1,000 円が翌年 3 倍，その次の年 8 倍になったとする。年平均何倍になったか。

（解説）実際に計算すると，右の用のように，1,000 円は 24,000 円になる。

今年	→	翌年	→	翌々年
1,000	×3	3,000	×8	24,000

３と８の相乗平均は，

$\sqrt{3\times 8}=2\sqrt{6}$

より，右表のようになる

今年	→	翌年	→	翌々年
1,000	$\times 2\sqrt{6}$	$2,000\sqrt{6}$	$\times 2\sqrt{6}$	24,000

（参考）ちなみに，３と８の相加平均だと

$\frac{3+8}{2}=5.5$

よって，右の表の通り結果がおかしくなることを生徒に示すのもよい。

今年	→	翌年	→	翌々年
1,000	×5.5	5,500	×5.5	30,250

(2)　「速さの平均」は調和平均で考える。

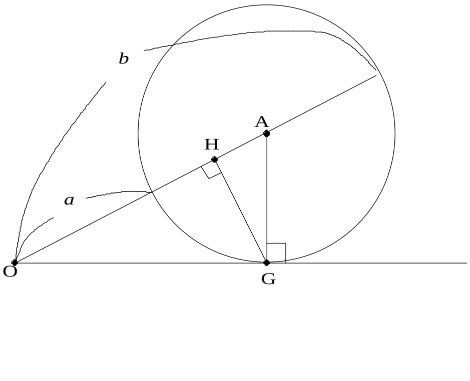
（例）120km 離れた 2 地点Ａ，Ｂ間を行きは時速８km，帰りは時速 12km で往復した。平均時速何 km で移動したことになるか？

（解説）実際にかかった時間を計算して平均の速さを求めると，右の表のように，9.6km/h となる。

Ａ→Ｂ	Ｂ→Ａ	合計時間	平均時速
15h	10h	25h	9.6km/h

そこで，８と 12 の調和平均を計算すると，$\dfrac{2}{\frac{1}{8}+\frac{1}{12}}=9.6$ km/h　同じ結果が得られる。

(3)　相加平均・相乗平均・調和平均の関係



$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$ を図で表すのもよい。

$0<a \leq b$ として，点Ａを円の中心として左図をかく。このとき，線分ＯＡ，ＯＧ，ＯＨはそれぞれ相加平均・相乗平均・調和平均になる（前項の方べきの定理も使える)。

さらに $a=b$ のときは円の半径が０になり，３点Ａ，Ｇ，Ｈは重なるので　ＯＡ＝ＯＧ＝ＯＨすなわち等号成立も明らかである。

$\boxed{\text{その３}}$ **相加平均・相乗平均を使った証明の例**

（例）　$a>0, b>0$ のとき，不等式 $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\geq 9$ を証明せよ。

また，等号が成り立つのはどのようなときか。

（解答）　(左辺) $= ab+4+1+\dfrac{4}{ab} = ab+\dfrac{4}{ab}+5$

ここで，$ab>0, \dfrac{4}{ab}>0$ より相加平均・相乗平均の関係から

$$ab+\frac{4}{ab}+5 \geq 2\sqrt{ab\cdot\frac{4}{ab}}+5 = 4+5 = 9$$

よって，

$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\geq 9$ は成り立つ。

等号成立は $ab=\dfrac{4}{ab}$ のとき

すなわち $(ab)^2=4$

$a>0, b>0$ より $ab=2$ のとき

＜参考＞
相加平均と相乗平均の関係

○＋□≧$2\sqrt{\text{○□}}$

における等号成立条件は

○＝□

のときである。
　この公式をうまく使えない生徒に対して，どこが○になるか，どこが□になるかを付けさせて利用するように指導する。

（参考）　この問題でよくある誤答は，

（誤答）　$a+\dfrac{1}{b}\geq 2\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ ……①

$b+\dfrac{4}{a}\geq 2\sqrt{b\cdot\dfrac{4}{a}} = 4\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ ……②

①，②を辺々かけ合わせて

$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\geq 2\sqrt{\dfrac{a}{b}}\times 4\sqrt{\dfrac{b}{a}} = 8$ ……③

どこが間違っているかというと，

①では $a=\dfrac{1}{b}$ すなわち $ab=1$ のとき等号が成り立つ。

②では $b=\dfrac{4}{a}$ すなわち $ab=4$ のとき等号が成り立つ。

つまり，それぞれの最小値を与える条件が異なっており，同時に最小とならないために起こったミスである。等号成立条件を確認する意味も合わせて指導したい。

以下の例ではどうであろうか。

（例）　$a>0, b>0$ のとき，不等式 $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(b+\dfrac{4}{b}\right)\geq 8$ を証明せよ。

また，等号が成り立つのはどのようなときか。

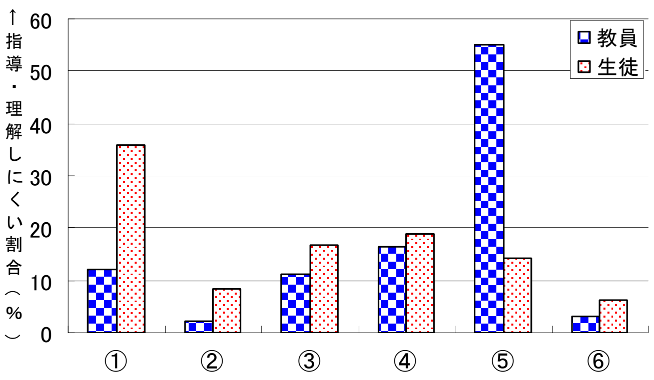
(11) 軌跡に関する内容　　教員が指導しやすい 18.0%，生徒が理解しやすい 16.8%

【教員用質問】
① 軌跡についての説明
②『2 定点Ａ(1, 0)，Ｂ(3, 2)から等距離にある点Ｐの軌跡を求めよ』のような問題の説明
③『$x = t + 1,\quad y = t^2 - 2$　のとき点(x, y)の軌跡を求めよ』のような問題の説明
④『放物線 $y = x^2$ 上を動く点Ｐと定点Ａ$(4, 2)$に対して，線分ＡＰの中点Ｑの軌跡を求めよ』のような問題の説明
⑤ 答えに，除く部分がでてくる問題の説明
⑥ その他　　⑨ 理解しやすい

【生徒用質問】
① 何をやればいいのか分からない
②『2 定点Ａ(1, 0)，Ｂ(3, 2)から等距離にある点Ｐの軌跡を求めよ』のような問題ができない
③『$x = t + 1,\quad y = t^2 - 2$　のとき点(x, y)の軌跡を求めよ』のような問題ができない
④『放物線 $y = x^2$ 上を動く点Ｐと定点Ａ$(4, 2)$に対して，線分ＡＰの中点Ｑの軌跡を求めよ』のような問題ができない
⑤ 答えに，除く部分がでてくる問題ができない
⑥ その他　　⑨ 理解しやすい

【集計結果及び分析】

	①	②	③	④	⑤	⑥
教員	12.0%	2.1%	11.2%	16.5%	55.2%	3.1%
生徒	36.0%	8.2%	16.6%	18.8%	14.3%	6.1%



軌跡に関する内容で,「指導しやすい」と回答した教員は 18.0%,「理解しやすい」と回答した生徒は 16.8%で，２割に満たないことから，かなり指導しにくい，理解しにくい内容であることが分かる。

生徒は「①何をやればいいのか分からない」が極端に多く，基本的なところでつまずいていることが分かる。次に数値が高いのは，③，④のような媒介変数が入った問題である。⑤の除く部分が出てくる問題の数値は，表面的に上がっていないように見えるが，基本的な部分で多くの生徒がつまずいていることから，多くの生徒が理解できていないと考えられる。数学の好き嫌い別，文理別に集計してみると，大差はなく，数学の好きな生徒，理系の生徒でも理解しにくい分野であることが分かる。

教員は，⑤の除く部分が出てくる問題について圧倒的に数値が高くなっている。

【指導上の留意点】

集計結果から，教員の意識が「動点」や「除く点」といった次の段階に進んでいる一方で，生徒は「何をやればいいのか」という最初のところでつまずいている。軌跡の求め方そのものはパターン化でき，説明も比較的簡単にできるので，教員はあっさりと授業を進めがちであるが，問題を解くたびに軌跡を求める手順の確認をし，丁寧に解説する必要がある。また，一問一問，図を丁寧に描きながら理解させるように指導したい。図で確認する習慣を付けておけば，教員が最も「指導しにくい」としている「⑤除く部分」を考える段階になったときも，存在範囲を確認しやすく，解くヒントになる

場合がある。

【具体的な指導法の提案】

$\boxed{\text{その１}}$　**動点に対する軌跡の問題**

導入として媒介変数表示の軌跡を扱い，媒介変数に慣れさせておく。

（例１）　$x=\dfrac{t+1}{2}$ ……①，　$y=t^2$ ……②　をみたす点Ｐ(x, y)の軌跡を求めよ。

（解答）　①より $t=2x-1$ を②に代入して，　$y=(2x-1)^2=4x^2-4x+1$ （放物線）

（例２）　放物線 $y=2x^2$ 上を動く点Ｑと定点Ａ$(1, 0)$を結ぶ線分ＡＱの中点の軌跡を求めよ。

（解答）　求める中点の座標を(X, Y)，点Ｑ$(t, 2t^2)$とおく。

中点の公式より

$$\begin{cases} X=\dfrac{t+1}{2} \\ Y=\dfrac{2t^2+0}{2}=t^2 \end{cases}$$

以下（例１）と同様

「点○の軌跡を求めよ」

その点を$(x,\ y)$ または$(X,\ Y)$とおく。

（例３）円 $x^2+y^2=1$ 上を動く点Ｑと定点Ａ$(4, 0)$を結ぶ線分ＡＱを $1:2$ に内分する点Ｐの軌跡を求めよ。

（解答）　Ｐ(X, Y)，Ｑ(s, t)とおくと，点Ｑは円 $x^2+y^2=1$ 上にあるので　$s^2+t^2=1$ ……①

点Ｐは線分ＡＱを１：２に内分するから

$$\begin{cases} X=\dfrac{8+s}{3} \\ Y=\dfrac{t}{3} \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} s=3X-8 \\ t=3Y \end{cases}$$

①　に代入して　$(3X-8)^2+(3Y)^2=1$

$$\therefore \left(X-\frac{8}{3}\right)^2+Y^2=\frac{1}{9}$$

よって，求める軌跡は，中心$\left(\dfrac{8}{3},\ 0\right)$，半径$\dfrac{1}{3}$　の円

POINT!

求める軌跡上の点を(X, Y)，

動点を媒介変数で表す

$\boxed{\text{その２}}$　**交点の軌跡**

求める軌跡上の点を(X, Y)とおかないと，パターンに合わなくなり生徒は混乱しやすい。媒介変数 m を消去することは原則通りであるので，あえてＰ(X, Y)とおいてみてもよい。

（例）　２直線　$mx-y=0$，$x+my-m-2=0$　の交点Ｐはどんな図形を描くか。

（解答１）　**媒介変数 m を消去する**

Ｐ(X, Y)とおくと　$mX-Y=0$ ……①，　$X+mY-m-2=0$ ……②

（ｉ）　$X=0$ のとき

①より $Y=0$，　このとき②より $-m-2=0$　$\therefore m=-2$

よって，点$(0, 0)$は①，②の交点である。

（ⅱ）　$X\neq 0$ のとき

①より $m=\dfrac{Y}{X}$ を②に代入して　$X+\dfrac{Y^2}{X}-\dfrac{Y}{X}-2=0$　　$\therefore X^2+Y^2-2X-Y=0$ ……③

③で $X\neq 0$ だから点$(0, 0)$，$(0, 1)$を除く。　　$(x-1)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$

（ｉ），（ⅱ）より　中心$\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$，半径$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　の円　ただし点$(0, 1)$を除く

（解答２）　**図形を用いて求める**

①は　$y=mx$　すなわち点$(0,0)$を通り傾きmの直線

（ただし，y軸を除く）

②は　$x-2+m(y-1)=0$

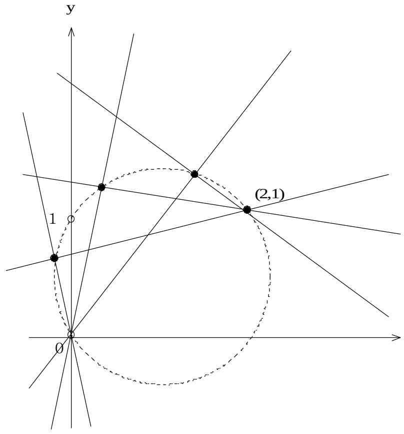
すなわち点$(2,1)$を通り傾き$-\dfrac{1}{m}$の直線

（ただし，直線$y=1$を除く）

①，②の傾きから　①⊥② であるので円周角の性質より

交点の軌跡は点$(0,0)$と点$(2,1)$を直径の両端とする円

すなわち中心$\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$，半径$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$の円の点$(0,1)$を除く部分



その３　**存在する条件を考える問題**

（例 1）放物線　$y=x^2$……①　と直線$y=2x+k$……②　とが異なる２点で交わるとき，交点の中点Mの軌跡を求めよ。

（解答）　①，②より　$x^2=2x+k$　$\therefore x^2-2x-k=0$……③

①，②が異なる２点で交わるとき，③の判別式をＤとすると

$$\frac{D}{4}=1+k>0 \quad \text{より} \quad k>-1 \quad \cdots\cdots ④$$

ここで，③の解をα,βとすると，解と係数の関係より$\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=-k$，

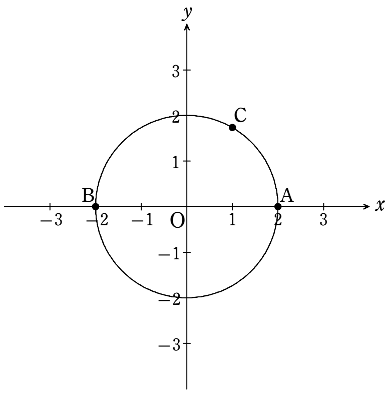
２つの交点の座標は，$(\alpha,\ 2\alpha+k)$，$(\beta,\ 2\beta+k)$ となる。

M(X,Y)とおくと　$X=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{2}{2}=1$，$Y=\dfrac{2\alpha+k+2\beta+k}{2}=2+k$

④より　$Y>1$

よって，求める点Mの軌跡は　直線$x=1$の$y>1$の部分

（例２）　２点Ａ$(2,0)$，Ｂ$(-2,0)$を通る円　$x^2+y^2=4$　上を点Ｃが動く。３点Ａ，Ｂ，Ｃが三角形をつくるとき，△ＡＢＣの重心Ｐの軌跡を求めよ。



（解答）　点Ｐ，Ｃの座標を，それぞれ(X,Y)，(s,t)とする。

点Ｃは円　$x^2+y^2=4$　上にあるから　$s^2+t^2=4$　……①

点Ｐは△ＡＢＣの重心であるから

$$X=\frac{2+(-2)+s}{3},\qquad Y=\frac{0+0+t}{3}\quad\cdots\cdots②$$

$$\therefore s=3X\quad,\quad t=3Y$$

①に代入して　$(3X)^2+(3Y)^2=4$　すなわち　$X^2+Y^2=\dfrac{4}{9}$

ここで，点Ｃが点Ａ，Ｂに重なるとき，△ＡＢＣはできないから

$(s,t)\neq(2,0),(-2,0)$

②より　$(X,Y)\neq\left(\dfrac{2}{3},0\right),\left(-\dfrac{2}{3},0\right)$

よって，求める軌跡は中心$(0,0)$，半径$\dfrac{2}{3}$の円。ただし，２点$\left(\dfrac{2}{3},0\right),\left(-\dfrac{2}{3},0\right)$を除く。

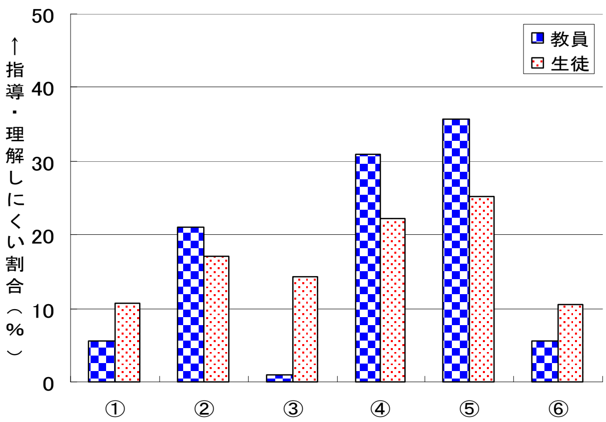
(12) 三角関数のグラフに関する内容 | 教員が指導しやすい 26.5%，生徒が理解しやすい 35.8%

【教員用質問】
① $y=\sin\theta$， $y=\cos\theta$ のグラフの説明
② $y=\tan\theta$ のグラフの説明
③ $y=2\sin\theta$， $y=2\cos\theta$ などのグラフが分からない
④ $y=\sin 2\theta$， $y=\cos 2\theta$ などのグラフが分からない
⑤ $y=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$， $y=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$ などのグラフが分からない
⑥ その他　　⑨ 理解しやすい

【生徒用質問】
① $y=\sin\theta$， $y=\cos\theta$ のグラフが分からない
② $y=\tan\theta$ のグラフが分からない
③ $y=2\sin\theta$， $y=2\cos\theta$ などのグラフが分からない
④ $y=\sin 2\theta$， $y=\cos 2\theta$ などのグラフが分からない
⑤ $y=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$， $y=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$ などのグラフが分からない
⑥ その他　　⑨ 理解しやすい

【集計結果及び分析】

	①	②	③	④	⑤	⑥
教員	5.6%	21.1%	1.0%	30.9%	35.8%	5.6%
生徒	10.7%	17.1%	14.2%	22.3%	25.2%	10.6%



三角関数のグラフに関する内容で,「指導しやすい」と回答した教員は 26.5%,「理解しやすい」と回答した生徒は 35.8%であった。教員，生徒にとって,指導しにくい,理解しにくい内容であることが分かる。

具体的には,「④ $y=\sin 2\theta$， $y=\cos 2\theta$ 」の x 軸方向の拡大縮小と，「⑤ $y=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$， $y=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$ 」のグラフの平行移動のところが教員，生徒ともに高く，指導しにくい，理解しにくい内容であることが分かった。続いて,「② $y=\tan\theta$ 」のグラフで,「① $y=\sin\theta$， $y=\cos\theta$ 」のグラフとに比べて，教員も生徒も指導しにくい，理解しにくい内容であることが分かった。

意識に差が出たのは,「③$y=2\sin\theta$， $y=2\cos\theta$ 」のグラフで，教員はほとんど気にかけず簡単に指導してしまっているが，理解しにくいと感じている生徒が比較的多いことが分かった。

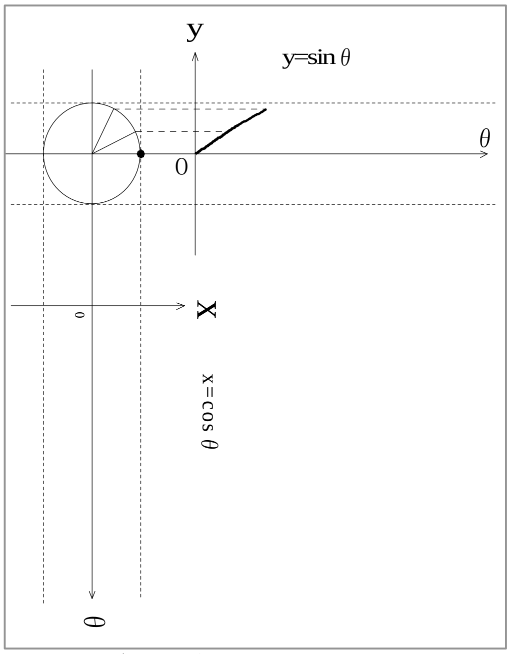
【指導上の留意点】

集計結果から， $y=\sin\theta$， $y=\cos\theta$ のグラフに比べて $y=\tan\theta$ のグラフが理解しにくいようなので，丁寧に指導していく必要がある。特に,漸近線については,正確なグラフをかくヒントにもなるので,確実に求められるように指導しておきたい。

また,「③$y=2\sin\theta$， $y=2\cos\theta$ 」の y 軸方向の拡大縮小について意識の差があったので，常に「④ $y=\sin 2\theta$， $y=\cos 2\theta$ 」の x 軸方向の拡大縮小とペアでまとめをし，定着を図っていきたい。

整関数の場合は，四則計算で y の値を求めることができるが，三角関数の場合， θ から三角関数の値を求める作業がワンクッションはいるので，やや抵抗を感じる生徒もいるようである。初めて学習する周期関数でもあり，単位円との対応を意識させながら丁寧にグラフの指導を進めたい。

【具体的な指導法の提案】



その１　グラフの導入

やはり最初は，実際に点をとって，自分でグラフをかく授業が必要である。$y=\sin\theta$ は角度（θ）→y 座標，$y=\cos\theta$ は角度（θ）→x 座標の関数であることから右のようなシートを活用する。$y=\tan\theta$ についても $y=\sin\theta$ と同様なシートでかくことができる。$y=\sin\theta$，$y=\cos\theta$ の周期は 2π で $y=\tan\theta$ の周期は π であることも，グラフをかくことで印象付けられる。

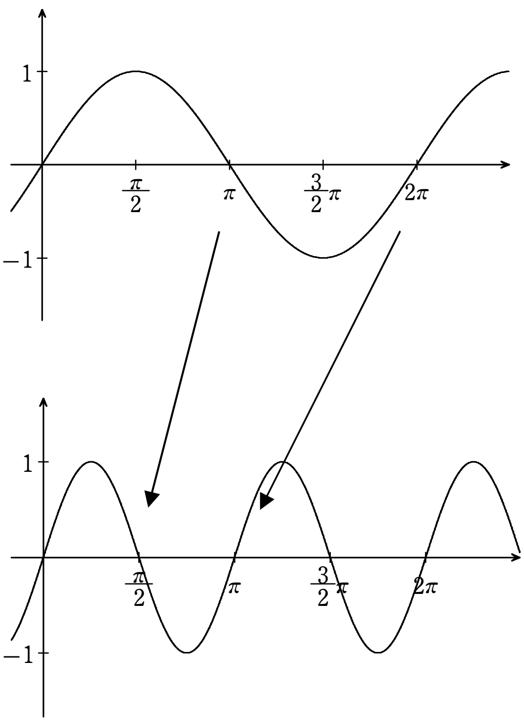
その２　y 軸方向の拡大・縮小（$y=k\sin\theta$ のグラフ）

先ほどの $y=\sin\theta$ のシートに，具体的な点をいくつかとって $y=k\sin\theta$ のグラフを上書きする。$y=\sin\theta$ のグラフに対して，k が付くことによりどのように変わるかを実感させることが重要である。

あるいは，半径 k の円を使って先ほどのシートの $y=\sin\theta$ のグラフに上書きし，違いを見るのもよい。最終的に「$y=k\sin\theta$ のグラフは $y=\sin\theta$ のグラフを y 軸方向に k 倍に拡大したグラフ」であるとまとめる。

その３　x 軸方向の拡大・縮小，周期の変化（$y=\sin k\theta$ のグラフ）

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin 2\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0



k が付くことにより，生徒は x 軸方向に k 倍になると勘違いするが，逆に $1/k$ になる。$y=\sin 2\theta$ を例に説明する。教科書では，上表を作り，θ の前に２が付くことによって，周期が半分になるとしている場合が多い。

次のように説明することもできる。

2θ で単位円を１周するには

$2\theta=2\pi \quad \therefore \theta=\pi$

すなわち，θ は０から π まででよく，周期は π と分かる。

つまり，2θ となると x 軸方向に 1/2 に縮小される。最終的に，

「$y=\sin k\theta$ のグラフは $y=\sin\theta$ のグラフを x 軸方向に $1/k$ 倍したグラフ」であるとまとめる。

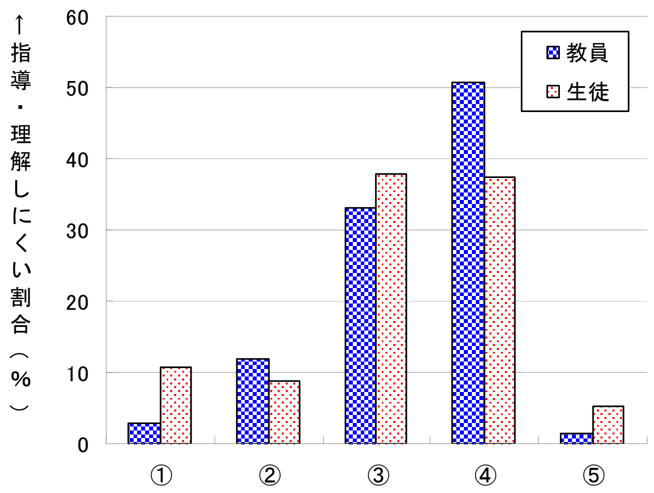
(13) 三角方程式・不等式に関する内容　$\boxed{\text{教員が指導しやすい 22.3\%，生徒が理解しやすい 26.3\%}}$

【教員用質問】
① $\sin\theta$， $\cos\theta$ の方程式・不等式の説明　② $\tan\theta$ の方程式・不等式の説明
③ 『$\sin(2\theta-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$， $\sin(2\theta-\frac{\pi}{6})<\frac{1}{2}$』のような $\sin\theta$， $\cos\theta$ の複雑な問題
④ 『$\tan(2\theta-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$， $\tan(2\theta-\frac{\pi}{6})<\frac{1}{2}$』のような $\tan\theta$ の複雑な問題
⑤ その他　⑨ 指導しやすい

【生徒用質問】
① $\sin\theta$， $\cos\theta$ の三角方程式・不等式が分からない
② $\sin\theta$， $\cos\theta$ の方程式・不等式は解けるが $\tan\theta$ の方程式・不等式が分からない
③ 『$\sin(2\theta-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$， $\sin(2\theta-\frac{\pi}{6})<\frac{1}{2}$』のような $\sin\theta$， $\cos\theta$ の複雑な問題が分からない
④ 『$\tan(2\theta-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$， $\tan(2\theta-\frac{\pi}{6})<\frac{1}{2}$』のような $\tan\theta$ の複雑な問題が分からない
⑤ その他　⑨ 理解しやすい

【集計結果及び分析】

	①	②	③	④	⑤
教員	2.9%	12.0%	33.0%	50.7%	1.4%
生徒	10.7%	8.9%	37.9%	37.3%	5.2%



三角方程式・不等式に関する内容では，「指導しやすい」と回答した教員は 22.3%，「理解しやすい」と回答した生徒は 26.3%と低い結果であった。この結果は，今回の調査項目のうちで，一番低い数値である。このことから，三角方程式・不等式に関する内容は，教員，生徒ともに指導しにくい，理解しにくい内容であることが分かった。

具体的には，教員，生徒ともに③，④の回答が多く，角の部分が $2\theta-\frac{\pi}{6}$ というように複雑になった問題が指導しにくい，理解しにくい問題であることが分かる。

意識に差が出たのは，生徒で①と回答したのが 10.7%もあり，三角方程式，不等式の基本からつまずいている生徒がいることが分かる。また，教員は，$\tan\theta$ に関する問題が $\sin\theta$， $\cos\theta$ の問題より指導しにくいと感じていることが分かった。

文系，理系別では，理解しやすいと答えたのは，文系 18.3%，理系 32.4%と差は見られたものの，①から⑤の各項目の回答における文系，理系の差は見られなかった。

数学の好き嫌い別では，①と回答したのは，「数学が好き」である生徒は 6.9%，「数学が嫌い」である生徒は 15.1%と差が見られた。「数学が嫌い」である生徒にとっては，$\sin\theta$， $\cos\theta$ の方程式，不等式の基本段階でつまずいている。また，②と③では差は見られなかったが，④を回答した「数学が好き」である生徒は 41.6%，「数学が嫌い」である生徒は 32.4%と，表面的に逆転しているように見られるが，数学が嫌いな生徒は，④以前の基本的な部分でつまずいているためにこのような結果になったと考えられる。

【指導上の留意点】

集計結果から，生徒の中には「①$\sin\theta$，$\cos\theta$の三角方程式・不等式が分からない」という基本的な部分でつまずいている生徒があることから，定着するまで丁寧に指導する必要がある。

$\sin(2\theta-\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{2}$，$\sin(2\theta-\dfrac{\pi}{6})<\dfrac{1}{2}$ のように，角の部分が複雑な場合も，その複雑な部分を他の文字に置き換えることにより，先ほどの基本的な問題に帰着するので，基本的な問題を確実に理解をさせてから複雑な問題を解くようにしなければならない。

【具体的な指導法の提案】

三角方程式・不等式に関する内容で大切なことは，

step1：与えられた方程式あるいは不等式から該当する部分を単位円にとる

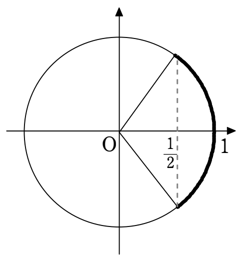
step2：θの定義域と単位円の該当部分から正確にθの範囲を読む

の２つの step である。これらのことを定着させた上で，複雑な問題に取り組ませたい。

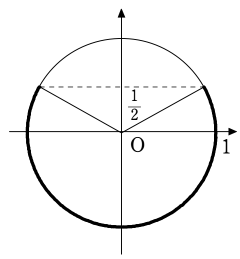
その１　単位円周上の範囲から角度を求める練習

（例）(1) 次の不等式を満たすθの範囲を単位円周上に図示せよ。

(ｱ) $\cos\theta>\dfrac{1}{2}$



(ｲ) $\sin\theta<\dfrac{1}{2}$



(2) (1)の結果を利用して，次のθの定義域における解を求めよ。

(ｱ) $\cos\theta>\dfrac{1}{2}$　$0\leqq\theta<2\pi$　　　(ｲ) $\sin\theta<\dfrac{1}{2}$　$0\leqq\theta<4\pi$

その２　複雑な問題への応用

（例）$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$\sin(2\theta-\dfrac{\pi}{6})<\dfrac{1}{2}$ を解け。

（解）$t=2\theta-\dfrac{\pi}{6}$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ より，$-\dfrac{\pi}{6}\leqq2\theta-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{23}{6}\pi$ すなわち，$-\dfrac{\pi}{6}\leqq t<\dfrac{23}{6}\pi$

この範囲で，$\sin t<\dfrac{1}{2}$ を，単位円を用いて解く。

右図のスタートの$-\dfrac{\pi}{6}$から，ゴールの$\dfrac{23\pi}{6}$まで回転する間に,解のエリアにさしかかったところが答えになる。

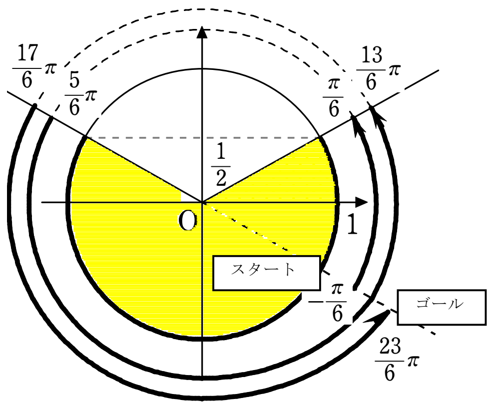
$-\dfrac{\pi}{6}\leqq t<\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi<t<\dfrac{13}{6}\pi$，$\dfrac{17}{6}\pi<t<\dfrac{23}{6}\pi$

よって，$-\dfrac{\pi}{6}\leqq2\theta-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi<2\theta-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{13}{6}\pi$，

$\dfrac{17}{6}\pi<2\theta-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{23}{6}\pi$

ゆえに，$0\leqq2\theta<\dfrac{\pi}{3}$，$\pi<2\theta<\dfrac{7}{3}\pi$，$3\pi<2\theta<4\pi$

よって，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{1}{2}\pi<\theta<\dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$



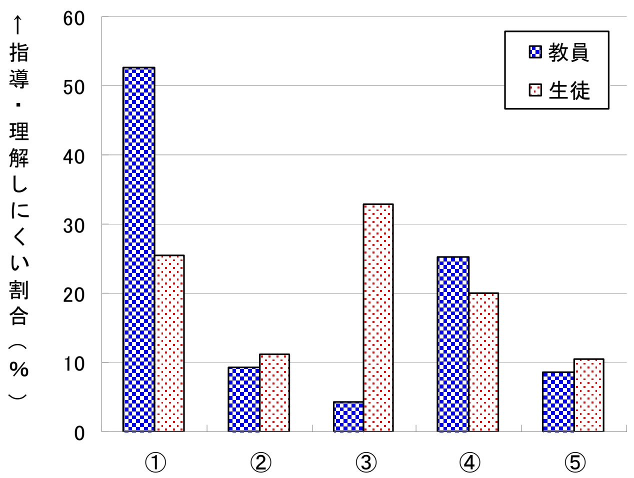
(14) 加法定理・２倍角の公式に関する内容 教員が指導しやすい 38.1%，生徒が理解しやすい 41.8%

【教員用質問】
① 加法定理の証明　② 加法定理の使い方の説明
③ ２倍角の公式の説明　④ ２倍角の公式の使い分け
⑤ その他　⑨ 指導しやすい

【生徒用質問】
① 加法定理の公式を覚えていない　② 加法定理は知っているが使い方が分からない
③ ２倍角の公式を覚えていない，あるいは自分で導き出せない
④ $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$ のどの式を使ったらいいか分からない
⑤ その他　⑨ 理解しやすい

【集計結果及び分析】

	①	②	③	④	⑤
教員	52.7%	9.2%	4.2%	25.2%	8.6%
生徒	25.4%	11.3%	32.9%	20.1%	10.4%



加法定理・２倍角の公式に関する内容で，「指導しやすい」と解答した教員は 38.1%，「理解しやすい」と解答した生徒は 41.8%であった。比較的，生徒は理解しやすい内容であることが分かる。

教員用アンケートでは，①の「加法定理の証明」が高い数値で 52.7%あり，指導しにくい項目であることが分かった。これは一般角における加法定理の証明が煩雑で，説明に時間がかかることが主たる原因と思われる。

一方，生徒用アンケートでは，③と回答したのが 32.9%と最も高い。２倍角の公式の定着は，教員が考えているよりも悪い。さらに，④を回答した教員，生徒はともに 20%を超えており，生徒は問題に応じて公式を使い分けることに不慣れで，苦手意識をもっていることが分かる。

文系，理系別については，大きな差は見られなかったが，数学の好き嫌い別については，数学が好きな生徒で「⑨理解しやすい」と回答したのは 51.7%，数学が嫌いな生徒で「⑨理解しやすい」と回答したのは 26.4%と非常に大きな差が見られた。

【指導上の留意点】

三角関数の公式は，加法定理，２倍角の公式，半角の公式，３倍角の公式，三角関数の合成，和積・積和の公式など数多くの公式が出てくるため，あきらめてしまう生徒やすべて公式を覚えてしまおうとする生徒が多い。この分野において最も重要な加法定理を確実に定着させた上で，公式を単に覚えさせるのではなく，各公式を必要に応じて自ら導き出せるように指導していきたい。三角関数の公式はこの分野だけに限らず，様々な活用場面があるので，確実に理解させたい。

【具体的な指導法の提案】

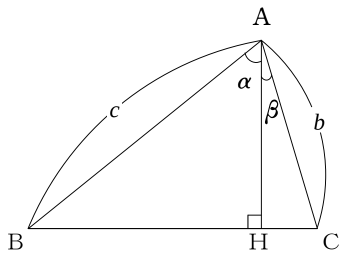
$\boxed{\text{その１}}$　**２つの三角形をあわせて加法定理を導く**

例）下図のように辺の長さ，角の大きさをとる。ＡＨ＝$b\cos\beta = c\cos\alpha$　より，三角形△ＡＢＣ，△ＡＣＨ，△ＡＢＨの面積は

$$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha+\beta)$$

$$\triangle \mathrm{ACH} = \frac{1}{2}b\,\mathrm{AH}\sin\beta = \frac{1}{2}bc\cos\alpha\sin\beta$$

$$\triangle \mathrm{ABH} = \frac{1}{2}c\,\mathrm{AH}\sin\alpha = \frac{1}{2}bc\sin\alpha\cos\beta$$



となる。

△ＡＢＣ＝△ＡＣＨ＋△ＡＢＨ　より，

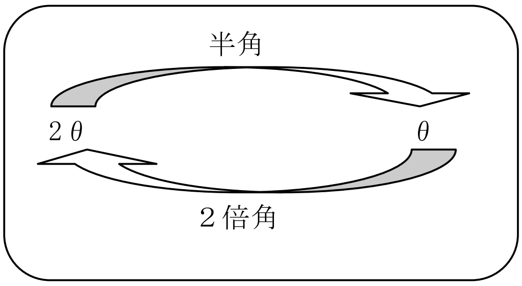
$$\frac{1}{2}bc\sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}bc\sin\alpha\cos\beta + \frac{1}{2}bc\cos\alpha\sin\beta$$

よって，

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$\boxed{\text{その２}}$　**半角の公式の指導法**

公式$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$　はθから２θの公式と捉えると，２倍角の公式といえる。2θからθの公式と捉えると半角の公式といえる。つまり，２倍角の公式と半角の公式は同じ式であって，捉え方の違いだけである。２倍角の公式さえ出せれば，半角の公式は必要に応じて変形すればよいことになる。



数学Ⅲにおいて，半角の公式を利用して　$\sin^2\theta$　や　$\cos^2\theta$　などの積分を計算するので，ここで２倍角の公式，半角の公式の見方・考え方を確実に理解させるとよい。

【２倍角の公式】　　２$\theta \longleftrightarrow \theta$　　【半角の公式】

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \longleftrightarrow \cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2} - 1 \Longleftrightarrow \cos^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1+\cos\theta}{2}$

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta \longleftrightarrow \cos\theta = 1 - 2\sin^2\dfrac{\theta}{2} \Longleftrightarrow \sin^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1-\cos\theta}{2}$

例）$\sin 15^\circ$　を２倍角の公式を用いて求めよ。

解）２倍角の公式　$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$　より，　$\theta = 15^\circ$を代入して，

$\cos 30^\circ = 1 - 2\sin^2 15^\circ$　　よって，$\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2\sin^2 15^\circ$　　ゆえに，$\sin^2 15^\circ = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$

$\sin 15^\circ > 0$より　$\sin 15^\circ = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ……(答)

(15) 三角関数の合成（$a\sin\theta + b\cos\theta = r\sin(\theta+\alpha)$）に関する内容

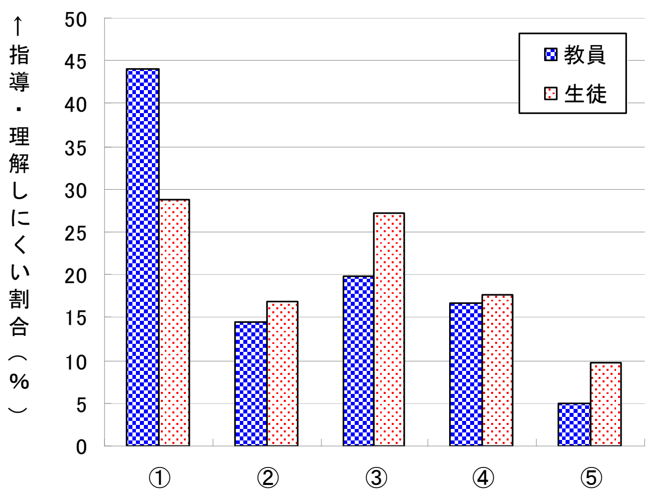
教員が指導しやすい 39.0%，生徒が理解しやすい 38.4%

【教員用質問】
① 合成の式の導き方　　② r，α の求め方
③ 合成の式の使い方
④『$\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta = 1$』のような問題の説明
⑤ その他　　⑨ 指導しやすい

【生徒用質問】
① この公式を知らない　　② r，α を求めることができない
③ 変形はできるが，合成の意味が分からない
④『$\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta = 1$』のような方程式になると分からない
⑤ その他　　⑨ 理解しやすい

【集計結果及び分析】

	①	②	③	④	⑤
教員	44.0%	14.5%	19.9%	16.6%	5.0%
生徒	28.8%	16.8%	27.2%	17.6%	9.7%



三角関数の合成に関する内容で,「指導しやすい」と解答した教員は 39.0%，「理解しやすい」と解答した生徒は 38.4%であった。

教員用アンケートでは,「①合成の式の導き方」が指導しにくいと回答している教員が多く，44.0%もあった。続いて「③合成の式の使い方」が高く 19.9%であった。

生徒用アンケートでは,「①この公式を知らない」「③変形は分かるが合成の意味が分からない」のところが高く３割近かった。

文理別については，理系で「理解しやすい」と回答した生徒は 41.4%，文系で「理解しやすい」と回答した生徒は 34.5%でやや差が見られたが,①から⑤の各項目についての文系，理系の差はおおむね３%以内であり，合成に関する文系，理系の差は少ないと考えられる。

数学の好き嫌い別については，「①合成の公式を知らない」と回答したのは，「数学が好き」である生徒の 22.3%に対して，「数学が嫌い」である生徒は 28.4%とやや差が見られた。

【指導上の留意点】

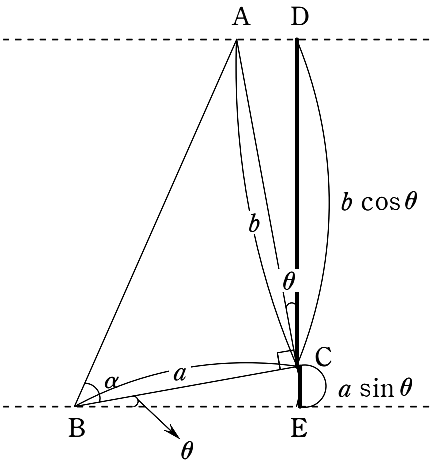
集計結果から r，α の求め方は機械的に求めることができるので問題はないようであるが，公式の導き方や使い方のところで問題があるようである。公式の導き方は，教科書のように加法定理の公式を利用して導く方法が一般的だが,それに加えて,直角三角形の図を利用して導く方法などを紹介し，印象付けて定着を図りたい。

また，合成の素晴らしいところは，sin θ と cos θ の２つの関数(波)が合わさって，１つの関数(波)にできるというところなので，実際にコンピュータを使って視覚で確認させることも重要である。

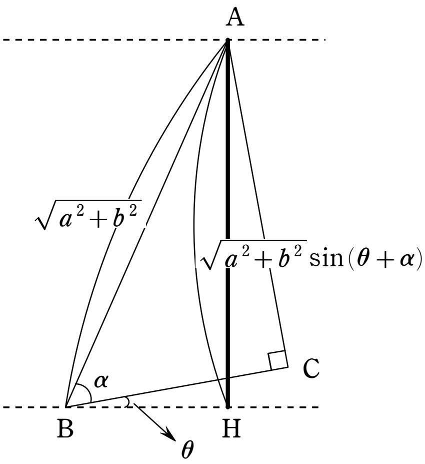
【具体的な指導法の提案】

$\boxed{\text{その１}}$　**三角関数の合成**

∠Ｃが直角の直角三角形ＡＢＣで，ＢＣ＝a，ＡＣ＝b，∠Ｂ＝α，とする。△ＡＢＣを，点Ｂを中心にθだけ回転した場合を考える。



ＣＥ＋ＣＤ＝$a\sin\theta+b\cos\theta$



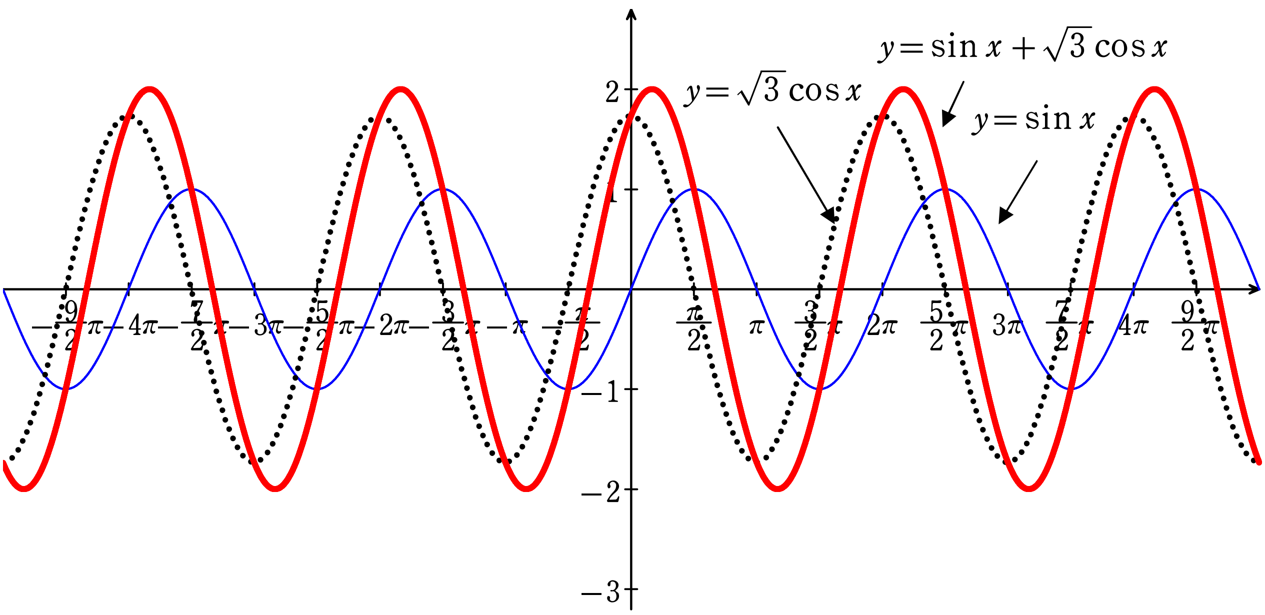
ＡＨ＝$\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

上図より　ＣＥ＋ＣＤ＝ＡＨ　が成り立つので，$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$　が成り立つ。

$\boxed{\text{その２}}$　三角関数の合成の意味

三角関数の合成の大切なポイントに，２つの波の合成が１つの新しい波になるというのがある。これを，GRAPES を用いて，視覚的な理解を促す。

例）$y=\sin\theta$，$y=\sqrt{3}\cos\theta$，$y=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ のグラフを GRAPES で作成し，$y=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ のグラフが１つの波形になることを視覚で確認する。次に，公式で変形した $y=2\sin(\theta+\frac{\pi}{3})$ のグラフを表示して，$y=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$　のグラフと一致することを確かめる。



（16）指数に関する内容　　教員が指導しやすい 36.3%，生徒が理解しやすい 43.3%

【教員用質問】

① n 乗根の説明　　② 指数法則の説明

③ $a^0=1$，$a^{-1}=\frac{1}{a}$，$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ の説明

④ 『$\sqrt{a^5}\times\sqrt[4]{a^3}\div\sqrt[4]{a^5}$ を計算せよ』のような計算の説明

⑤ 指数関数のグラフの説明

⑥ 『$2^x=8$』,『$2^{2x}-2^{x+1}=8$』のような方程式の説明

⑦ 『$\left(\frac{1}{2}\right)^x<\left(\frac{1}{2}\right)^4$』のような不等式の説明

⑧ その他　　⑨ 指導しやすい

【生徒用質問】

① n 乗根が分からない　　②指数法則を知らない

③ $a^0=1$，$a^{-1}=\frac{1}{a}$，$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ が分からない

④ 『$\sqrt{a^5}\times\sqrt[4]{a^3}\div\sqrt[4]{a^5}$ を計算せよ』のような計算ができない

⑤ 指数関数のグラフが分からない

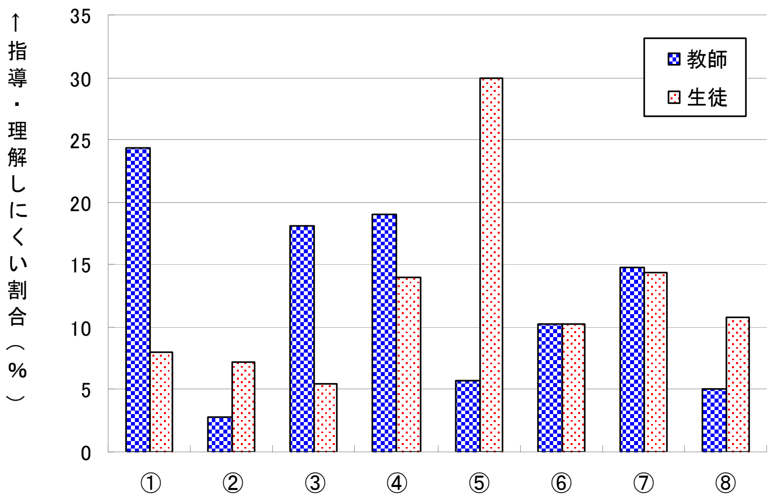
⑥ 『$2^x=8$』,『$2^{2x}-2^{x+1}=8$』のような方程式が解けない

⑦ 『$\left(\frac{1}{2}\right)^x<\left(\frac{1}{2}\right)^4$』のような不等式が解けない

⑧ その他　　⑨ 理解しやすい

【集計結果及び分析】

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
教員	24.4%	2.8%	18.1%	19.1%	5.7%	10.2%	14.7%	5.1%
生徒	8.0%	7.2%	5.5%	13.9%	30.0%	10.3%	14.4%	10.8%



指数に関する内容で，「指導しやすい」と回答した教員は 36.3%，「理解しやすい」と回答した生徒は 43.3%であった。

意識に差が出たのは，教員は「① n 乗根の説明」「④ n 乗根の計算」「③ n 乗根の基本公式」などの n 乗根の処理の部分で指導しにくいと感じている。それに対し，生徒は「⑤指数関数のグラフ」のところが高い数値を示している。教員が気遣っている n 乗根の処理については，生徒はそれほど理解しにくいとは感じておらず，それよりも底による場合分けが必要なグラフが理解できないようである。

文系，理系別について，文系は⑤と回答したのが 33.6%と理系の 26.1%と差が見られた。

数学の好き嫌い別については，「⑨理解しやすい」と回答したのは，「数学が好き」である生徒は

52.3%，「数学が嫌い」である生徒は 29.2%と大きな差が見られた。また，「① n 乗根が分からない」と答えたのは，「数学が好き」である生徒の 5.0%に対して，「数学が嫌い」である生徒は 11.1%と，差が見られた。指数の導入において配慮が必要である。

【指導上の留意点】

集計結果から，指数関数のグラフが理解しにくいようである。指数関数となる身近な例を紹介するなど印象付けて生徒の理解を深めさせたい。特に，底によって，グラフが単調増加になったり，単調減少になるところは，不等式の問題や数学Ⅲの極限のところで重要になってくるので確実に理解をさせたい。

数の拡張については，生徒は教員が思っているほど理解しにくいと感じていないようであるが，数学の好き嫌い別の調査結果から，数学の苦手な生徒にとっては難しく抵抗を感じているようなので，今までと同様に丁寧な指導が必要である。

【具体的な指導法の提案】

$\boxed{\text{その１}}$　**身近なものを題材に指数関数の感覚を身につけさせる**

バクテリアの増殖,金利計算など指数関数の例はいくつかある。身近な物では紙を例にするとよい。

（例）厚さ 0.07 ミリの大きな紙がある。１回折ると，厚さは，0.07×２＝0.14 ミリ，２回折ると，厚さは，0.07×２×２＝0.28 ミリになる。この調子で折り続けることが可能だとすると，紙の厚さが自分の身長を超えるためには何回折る必要があるか。予測した後，実際に計算しなさい。

$\boxed{\text{その２}}$　**指数関数のグラフを利用して，数の大小を求める問題**

数の大小を問題で，$y=2^x$ のグラフを利用して求める方法と，$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ のグラフを利用して求める方法の２つを紹介し，定着を図る。

（例）$\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$ ，$\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{2}{3}}$ ，$\sqrt{8}$ の大小を調べよ。

解）$\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}=2^{-\frac{1}{3}}$ ，$\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{2}{3}}=2^{\frac{4}{3}}$ ，$\sqrt{8}=2^{\frac{3}{2}}$

右のグラフより，

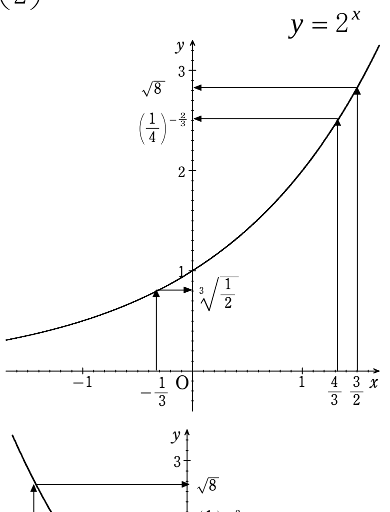
$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{2}{3}} < \sqrt{8} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

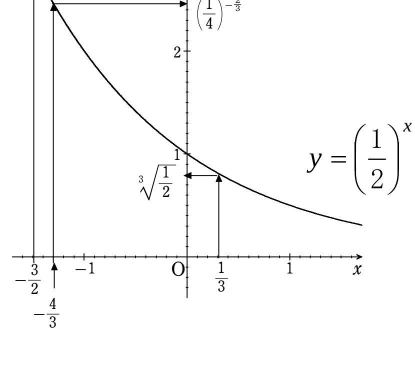
また，

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} ,\ \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{2}{3}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}},\ \sqrt{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

左のグラフより，

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{2}{3}} < \sqrt{8} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$





(17) 対数に関する内容　　　　　　　　　　　教員が指導しやすい 34.2%，生徒が理解しやすい 27.5%

【教員用質問】

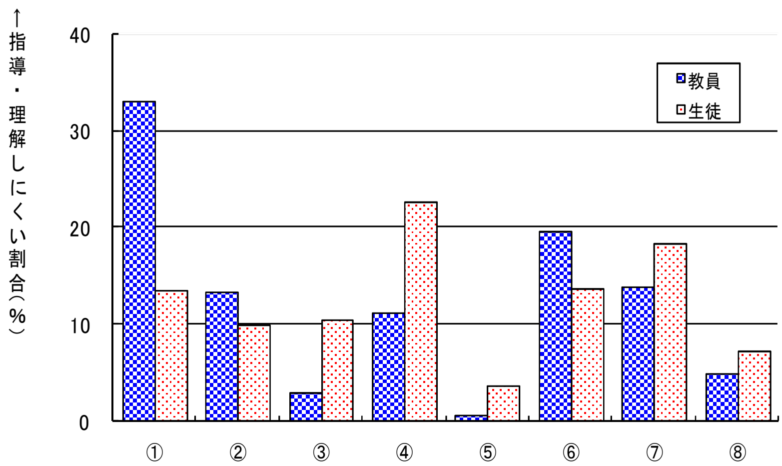
① 対数の定義の説明（$a^p = \mathrm{M} \Leftrightarrow p = \log_a \mathrm{M}$）
② 対数に関する公式の説明
③ 『$\log_2 3 \cdot \log_3 8$ を計算せよ』のような計算の説明
④ 対数関数のグラフの説明
⑤ 『$\log_2 x = 3$』のような方程式の説明
⑥ 『$\log_{\frac{1}{2}} x < 3$』のような不等式の説明
⑦ 3^{20} の桁数を求める問題の説明
⑧ その他　　　　　　　　　　　⑨ 指導しやすい

【生徒用質問】

① 対数の定義の説明（$a^p = \mathrm{M} \Leftrightarrow p = \log_a \mathrm{M}$）が分からない
② 対数に関する公式が分からない
③ 『$\log_2 3 \cdot \log_3 8$ を計算せよ』のような対数計算ができない
④ 対数関数のグラフが分からない
⑤ 『$\log_2 x = 3$』のような方程式が解けない
⑥ 『$\log_{\frac{1}{2}} x < 3$』のような不等式が解けない
⑦ 3^{20} の桁数を求めることができない
⑧ その他　　　　　　　　　　　⑨ 理解しやすい

【集計結果及び分析】

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
教員	33.1%	13.4%	2.9%	11.2%	0.7%	19.7%	14.0%	5.0%
生徒	13.6%	10.0%	10.5%	22.8%	3.7%	13.7%	18.3%	7.3%



対数に関する内容で,「指導しやすい」と回答した生徒は 34.2%,「理解しやすい」と回答した生徒は 27.5%であった。

意識に差が出たのは,「①の対数の定義」である。教員の 33%が指導しにくいと感じているのに対して，生徒で理解しにくいと回答したのは 14%程度であった。教員が丁寧に説明した結果，生徒はよく理解できたと考えられる。次に意識に差が出たのは,「④対数関数のグラフ」のところである。指数関数のグラフときと同様に，教員は説明しにくいとあまり感じていないが，生徒にとっては理解しづらい内容のようである。「⑥不等式」のところにも関係することなので丁寧な指導が必要である。

また,「⑦桁数」の問題についても生徒は理解しにくいようである。どうして対数をとるかその理由を丁寧に指導していかなければならない。

数学の好き嫌い別による調査結果では，数学が好きな生徒で「理解しやすい」と回答した生徒は 33.6%，数学が嫌いな生徒で「理解しやすい」と回答した生徒は 18%と大きな差が見られた。

【指導上の留意点】

対数は普段，あまり使わない関数なので，生徒への興味付けが難しい。特に，数学が嫌いな生徒にとっては，何をしているのか理解に苦しむ内容と思われる。具体的に身近な例を示したり，「対数とは指数の逆関数」「対数とは計算を楽にする（乗法は加法で，除法は減法で）ことができる関数」等の説明をして，興味関心を高め，定着を図りたい。

また，指数の公式と違って対数の公式は，覚えにくい公式ばかりなので，反復練習をして定着を図る必要がある。

$\mathrm{y}=\log_{\mathrm{a}} x$ のグラフは x,y,a の３変数と考えてしまい，混乱する生徒が多い。特に，底が１未満のときには，単調減少になることをしっかり注意しておかないと，不等式で混乱が起こる。対数関数は指数関数の逆関数なので，グラフは $y=x$ に関して対称になることもグラフの理解を助ける。

不等式では，グラフがしっかり定着していれば，底が１未満の時に符等号の向きが逆転することも理解できるであろう。底とグラフの形を意識させる指導をしたい。また，真数条件も忘れずに指導したい。

桁数では，そもそも何で常用対数をとればいいのかが理解できない生徒が多いので，指導に工夫が必要である。

【具体的な指導法の提案】　**桁数に関する指導**

教科書の例題ではすぐに常用対数をとっていて，その説明がない。以下のような説明を加えて常用対数をとる意味を納得させる。

（例）　3^{20} の桁数を求めよ。

（解説）　10^{n} という形に変形しなければ桁数を認識できない。

例えば，10^1 は２桁の一番小さい数(スタート)，10^2 は３桁のスタート，10^3 は４桁のスタート，…，10^n は $n+1$ 桁のスタート。といった具合である。従って，3^{20} が何桁の数か知りたければ 10 の何乗になるかを調べればよい。

（解答）　$3^{20}=10^x$　とおくと，

$$x=\log_{10} 3^{20}=20\log_{10} 3=20\times 0.4771=9.542$$

よって，$10^9<3^{20}=10^{9.542}<10^{10}$

ここで，10^9 は 10 桁のスタート，10^{10} は 11 桁のスタートより，3^{20} は 10 桁の数である。

「10^n は $n+1$ 桁」･･･暗記させない！
$10^1=10$ より２桁のスタート
$10^2=100$ より３桁のスタート
から出す。

（例）　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{50}$ は小数第何位に初めて０でない数が現れるか。

（解説）　10 の何乗かという形でないと分からない。

$10^{-1}=0.1$ より小数第１位に初めて０でない数が現れる。
$10^{-2}=0.01$ より小数第２位に初めて０でない数が現れる。
$10^{-n}=0.0\cdots1$ より小数第 n 位に初めて０でない数が現れる。

（解答）　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{50}=10^x$　とおくと，

$$x=\log_{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{50}=-50\log_{10} 3=-50\times 0.4771=-23.855$$

$-24<-23$　だから
$10^{-24}<10^{-23}$
逆にしない！

よって，$10^{-24}<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{50}=10^{-23.855}<10^{-23}$

10^{-24} は小数第 24 位に初めて０でない数が現れる。
10^{-23} は小数第 23 位に初めて０でない数が現れる。

「10^{-n} は小数第 n 位に初めて０でない数」･･･暗記させない！
$10^{-1}=0.1$ より小数第１位
$10^{-2}=0.01$ より小数第２位
から出す。

従って，$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{50}$ は小数第 24 位に初めて０でない数が現れる。

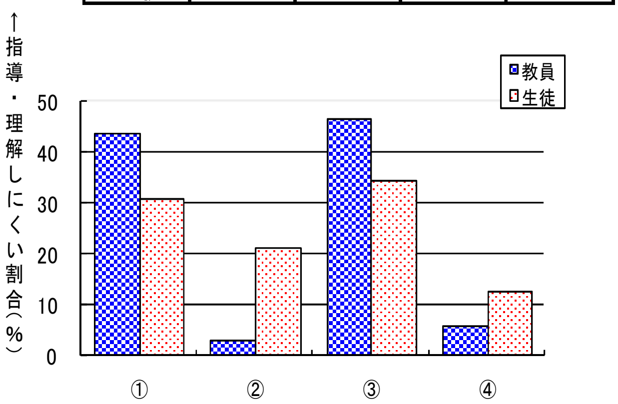
(18) 接線に関する内容　　　　　　　　　　　　　　教員が指導しやすい 41.2%，生徒が理解しやすい 43.2%

【教員用質問】
① $f'(a)$ が接線の傾きを表す理由の説明
② 『$y=2x^2-4x+3$ 上の点Ａ(2, 3)における接線の方程式を求めよ』のように曲線の点における接線の方程式の説明
③ 『$y=x^2+3$ のグラフに点Ａ(1, 0)から引いた接線の方程式を求めよ』のように曲線上にない点からの接線の方程式の説明
④ その他　　　　　　　　　　　　　　⑨ 指導しやすい

【生徒用質問】
① 接線の傾きが $f'(a)$ で求められる理由が分からない
② 『$y=2x^2-4x+3$ 上の点Ａ(2, 3)における接線の方程式を求めよ』のように曲線上の点における接線の方程式が求められない。
③ 『$y=x^2+3$ のグラフに点Ａ(1, 0)から引いた接線の方程式を求めよ』のように曲線上にない点からの接線の方程式が求められない。
④ その他　　　　　　　　　　　　　　⑨ 理解しやすい

【集計結果及び分析】

	①	②	③	④
教員	44.0%	3.3%	46.8%	5.9%
生徒	30.9%	21.5%	34.7%	12.9%



接線に関する内容で,「指導しやすい」と解答した教員は 41.2%,「理解しやすい」と解答した生徒は 43.2%であった。教員，生徒ともに，指導しやすい・理解しやすい内容であることが分かる。(理系の生徒，数学が好きと回答した生徒の割合は 50%を超えている。)

教員アンケートでは,「①微分係数が傾きであることの説明」と「③曲線外から引いた接線」の２つに偏って,「②曲線上の点における接線」を回答した教員は 3.3%しかいなかった。それに対して，生徒アンケートでは，①，③の数値も高いが，②も 21.5%と高い結果であった。この②については，文理別，数学の好き嫌い別に集計した結果を見ても 20%程度を示しており，ほぼ同じ傾向であることが分かった。曲線上の点における接線についても定着するまで丁寧に指導する必要がある。

【指導上の留意点】

数学の苦手な生徒の中には，直線の方程式を求めるとき，中学校時代に覚えた $y=ax+b$ の形ばかりを使って，高校で習う $y-b=m(x-a)$ の形が使えない生徒がいる。$y-b=m(x-a)$ は知っていると便利な公式なので，ここのところで定着を図りたい。

また，この単元の最初に，中学校で習った平均変化率を復習するが，中学校では $y=x^2$ の場合しか扱わないので，２点Ａ(a, a^2)，Ｂ(b, b^2)の平均変化率を計算して

$$(\text{平均変化率}) = \frac{b^2-a^2}{b-a}=b+a$$

「(平均変化率) ＝ (x 座標の和) ＝a＋b」として覚えてしまっている生徒が少なからずいるので注意したい。

次に注意する点は，「②曲線上における接線」と「③曲線外から引いた接線」の違いである。集計結果のように生徒の中につまずいている者がいるので，接線の問題のたびにその違いについて説明する方がよい。

また, 接線の傾きが微分係数 $f'(a)$ ではなく, 導関数 $f'(x)$ になってしまう生徒がいる。導関数は, 文字通り関数で，微分係数は $f'(x)$ の x に a を代入した“値”であることを強調したい。

【具体的な指導法の提案】

接線の方程式を求める場合，接点が分っていないときは自分で接点をとって解くことになる。このことを強調しながら指導していくことが重要である。

したがって，接線の方程式の解法は順番に

ア　接点の座標は何か？（曲線上の点になっているか？）

イ　接線の傾きは何か？

ウ　接線の方程式は何か？

というように，確認する。

（例１） $y=2x^2-4x+3$ 上の点Ａ(2，3)における接線の方程式を求めよ。

（解）　接点の座標はＡ(2，3)　　　←曲線上の点だからアを満たす。

$y'=4x-4$

$x=2$ を代入して　$f'(2)=4$

よって，$y-3=4(x-2)$

従って，$y=4x-5$

（例２） $y=x^2+3$ のグラフに点Ａ(1，0)から引いた接線の方程式を求めよ。

（解）　（Ａ(1，0)は曲線上の点ではないから，接点を自分でおく）

接点を (a, a^2+3) とおく。

$y'=2x$

$x=a$ を代入して　$f'(a)=2a$

よって接線の方程式は，$y-(a^2+3)=2a(x-a)$

したがって，$y=2ax-a^2+3$

この接線がＡ(1，0)を通るから，代入して

$0=2a-a^2+3$

$0=(a-3)(a+1)$

$a=3,-1$

接線の方程式に代入して，　$y=6x-6$，$y=-2x+2$

（例３） $y=x^3$ のグラフをＣとする。

(1)　点Ａ(1，1)における曲線Ｃの接線を求めよ。

(2)　点Ａ(1，1)を通る曲線Ｃの接線を求めよ。

「おける」と「通る」のことばの違いだけの問題である。しかし，(1)の「おける」の意味は点Ａが接点であるのに対して，(2)の「通る」は点Ａが接点だとは限らない。よって，(1)の解答は例１と同じように１つだけだが，(2)の解答は例２と同じように接点を設定する必要がある。

(1)の解答　$y=3x-2$（接点は(1，1)）

(2)の解答　$y=3x-2$（接点は(1，1)），$y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$（接点は$\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{8}\right)$）

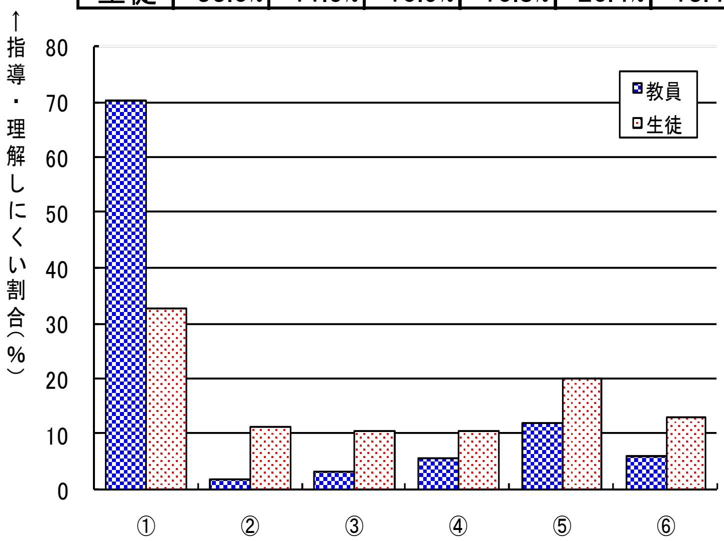
(19) 数Ⅱ面積に関する内容 　　　　　教員が指導しやすい 33.2%，生徒が理解しやすい 45.0%

【教員用質問】
① 面積が定積分になることの説明
② $y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a$， $x=b$ で囲まれた部分の面積の求め方
③ $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ で囲まれた部分の面積の求め方
④ 2 つの曲線で囲まれた部分の面積の求め方
⑤ $x=f(y)$ のグラフと y 軸および 2 直線 $y=a$， $y=b$ で囲まれた部分の面積の求め方
⑥ その他　　　　　　　　　　　　　⑨ 指導しやすい

【生徒用質問】
① 面積を求めるのに定積分する理由が分からない
② $y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a$， $x=b$ で囲まれた部分の面積が求められない
③ $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ で囲まれた部分の面積が求められない
④ 2 つの曲線で囲まれた部分の面積が求められない
⑤ $x=f(y)$ のグラフと y 軸および 2 直線 $y=a$， $y=b$ で囲まれた部分の面積が求めらない
⑥ その他　　　　　　　　　　　　　⑨ 理解しやすい

【集計結果及び分析】

	①	②	③	④	⑤	⑥
教員	70.2%	2.2%	3.4%	6.0%	12.1%	6.2%
生徒	33.0%	11.5%	10.9%	10.8%	20.4%	13.4%



数Ⅱ面積に関する内容で,「指導しやすい」と回答した教員は 33.2%，「理解しやすい」と回答した生徒は 45.0%であった。生徒は比較的分かりやすい内容だと思っていることが分かる。

教員のアンケート結果からは「①面積が定積分で求められる理由」が指導しにくいというのが圧倒的で，70.2%にもなる。やはり，教科書にある説明が生徒にとって難しく理解させるのが大変だと感じているようである。それに対して生徒は,「積分すると面積になるのだから，計算さえ出来ればいい」として受け入れているようで 33.0%であった。

そのほかの選択肢は「⑤ y 軸とで囲まれる部分の面積」が少々多い。 x での積分に慣れてしまっているので， y での積分に不慣れなようである。

【指導上の留意点】

教科書では，微分積分学の基本定理を用いて面積を定義している。しかし，歴史的には，積分は面積や体積を求めるために確立されたものである。したがって,「② $y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a$， $x=b$ で囲まれた部分の面積」を区分求積の考え方で示しておくのも 1 つの考え方である。

つまり $S=\lim_{\Delta x\to 0}\sum y\Delta x=\int_a^b y\,dx=\int_a^b f(x)dx$ という説明を加える。

これは，⑤の問題の考え方にもつながり，面積を求める式を立てる基本となる。

【具体的な指導法の提案】立式の工夫

次のステップで説明をする。

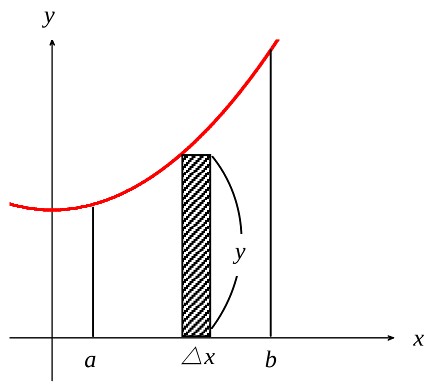
(step１)グラフの概形をかき，スライスする方向を決め，長方形の**短冊を描き入れる**。

(step２)長方形の**短冊の面積を** ***x*，*y*，*Δx*，*Δy*** **で表す**。

(長方形の面積) $= y\Delta x$

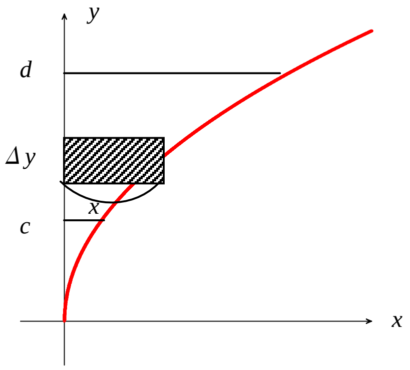
(step３)長方形の面積の総和を ***x*，*y*，*dx*，*dy*** で表す。

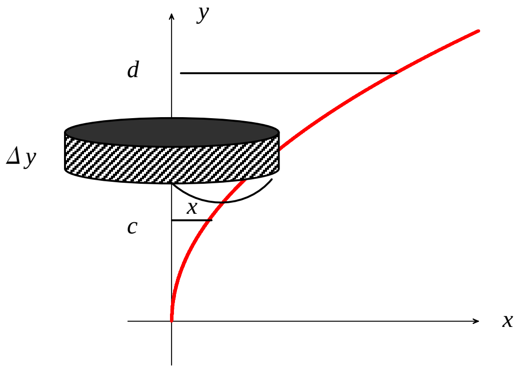
$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \sum y\Delta x = \int_a^b y\,dx$$



(step４)積分計算を行う。

普通の区分求積の方法であるが，ポイントとなるのは step２，step３のところで，立式するまで x，y，dx，dy のままで行うところにある。例えば，$x=f(y)$ と $y=c$，$y=d$，y 軸で囲まれた部分の面積，y 軸回転させたときの体積を求める式は以下のようになる。





短冊の面積　$x\Delta y$　　　　円盤の体積　$\pi x^2 \Delta y$

面積の総和　$S = \lim_{\Delta y \to 0} \sum x\Delta y = \int_c^d x\,dy$　　　　体積の総和　$V = \lim_{\Delta y \to 0} \sum \pi x^2 \Delta y = \int_c^d \pi x^2\,dy$

この方法が定着すると，「⑤ y 軸とで囲まれる部分の面積」の問題も解けるようになるし，次のような数学Ⅲの問題にも応用がきく。

(例題１)　$y = \sin x$，直線 $y=1$，y 軸で囲まれた部分を y 軸回転させたときの立体の体積を求めよ。

(解説)　$V = \lim_{\Delta y \to 0} \sum \pi x^2 \Delta y = \int_0^1 \pi x^2\,dy$　あとは，(step４)の積分計算であるが，x と y が混在しているので置換積分のようにどちらかに統一する。この問題では，$dy = \cos x \cdot dx$，積分区間を０から $\pi/2$ として，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi x^2 \cos x \cdot dx$ を計算する。

(例題２)　$x = \theta - \sin\theta,\ y = 1 - \cos\theta$　$(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$，$x$ 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(解説)　$S = \sum y\Delta x = \int_0^{2\pi} y\,dx$　あとは，(step４)の積分計算であるが，$dx = (1-\cos\theta)d\theta$，$y = 1-\cos\theta$ 積分区間は０から２π だから，$\int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)^2 d\theta$ を計算する。

(20) Σの計算に関する内容　　　　　　　　　　　　教員が指導しやすい 29.9%，生徒が理解しやすい 25.1%

【教員用質問】

① Σの意味　　　　　　　　　　　　　② $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$ の説明

③ $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$，$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ などの公式の説明

④ $\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1}$ のような形の説明

⑤ $\sum_{k=1}^{n} (k+n)$ のように n と k が混在したときの説明

⑥ その他　　　　　　　　　　　　　⑨ 指導しやすい

【生徒用質問】

①Σの式の意味が分からない　　　　　　　②$\sum_{k=1}^{n} 1 = n$ が分かりにくい

③ $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$，$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ などの公式が使えない

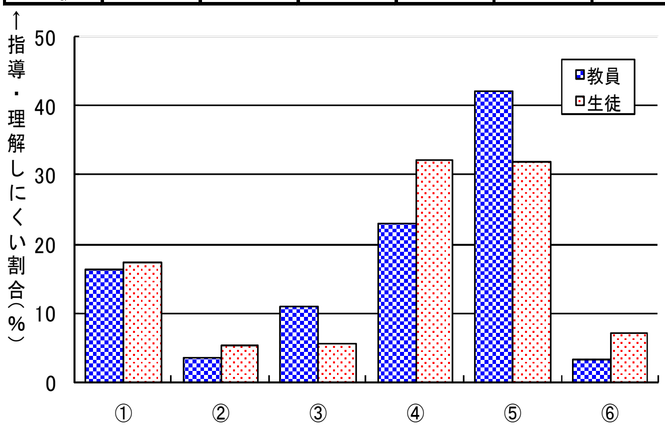
④ $\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1}$ の形の計算ができない

⑤ $\sum_{k=1}^{n} (k+n)$ のように n と k が混在すると分からない

⑥ その他　　　　　　　　　　　　　⑨ 理解しやすい

【集計結果及び分析】

	①	②	③	④	⑤	⑥
教員	16.5%	3.7%	11.1%	23.1%	42.2%	3.4%
生徒	17.4%	5.4%	5.7%	32.3%	32.1%	7.2%



Σの計算に関する内容で，「指導しやすい」と回答した教員は 29.9%，「理解しやすい」と回答した生徒は 25.1%で，教員は指導しにくく，生徒は理解しにくい内容であることが分かる。

教員アンケートからは「⑤ n と k が混在するときの和」の内容が指導しにくいようで 42.2%と高い結果であった。続いて「④ 等比数列の和」の内容が 23.1%であった。

生徒アンケートからは，教員のアンケート結果と同じく「⑤ n と k が混在するときの和」と「④等比数列の和」が理解しにくい内容で 32%であった。

意識には差が出たのは，④の $\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1}$ の計算のところで，教員は，等比数列の和の公式を使えばできるので，あまり注意していないのかもしれないが，生徒にとっては分かりにくい問題のようである。

【指導上の留意点】

④については，等比数列の和になることを理解させることが重要である。Σの式のままでは，初項，

公比，項数を読めない生徒に対して，Σを使わない式にすると分かりやすくなる。

　つまり，$\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1} = 1+3^1+3^2+3^3+\cdot\cdot\cdot+3^{n-1}$ として初項，公比，項数を読む。ここで再確認しておきたいことは，nは何個足すかという“項数”であることである。

　初項a，公比r，項数nの等比数列の和は

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a\left(r^n-1\right)}{r-1}$$

であるが，生徒は，“n項目”とか“最後のn”とか勘違いして

$$1+2+2^2+\cdots+2^n=\frac{2^n-1}{2-1}=2^n-1$$

という間違いをよくするので，注意を要する。

　⑤については，Σの意味をしっかり理解させることが重要である。つまり，

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

であり，Σの下に書いてある文字が変化する。それ以外の文字は定数であるので，数字と同じ扱いをする。つぎのような例を出して説明するとよい。

$$\sum_{k=1}^{n} nk = n+2n+3n+\cdots+n^2 = n\left(1+2+3+\cdots+n\right)=n\sum_{k=1}^{n} k$$

このように，Σを使わない式をかいて例を示す。そして，Σの下に書いてない文字nは数字と同じ働きをするから，Σの前に出すことが出来ることを説明する。Σの式の意味がよく分からないときには，「Σを使わずに式をかく」と理解しやすくなる場合がある。

【具体的な指導法の提案】

$\boxed{\text{その１}}$　**等比数列のΣ計算**

（例）$\sum_{k=1}^{n} 2^{k+1}$　を計算せよ。

（解説）$\sum_{k=1}^{n} 2^{k+1} = 2^2+2^3+\cdots+2^{n+1}$　として，初項４，公比２，項数nの等比数列の和だと確認した後で，公式に代入する。

$\boxed{\text{その２}}$　$\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^k$　**のような（等差）×（等比）型**

（例）$\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^k$ を計算せよ。

（解説）よくある誤答は，$\frac{1}{2}n(n+1)\left(2^n-1\right)$である。$\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^k = 1\cdot 2+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots+n\cdot 2^n$　と直すことに慣れさせたい。

$\boxed{\text{その３}}$　**nとkが混在するときの和**

（例）$\sum_{k=1}^{n} (k+n)$　を計算せよ。

（解説）
$$\sum_{k=1}^{n} (k+n) = (1+n)+(2+n)+(3+n)+\cdots+(n+n)$$
$$=\left(1+2+3+\cdots+n\right)+\left(n+n+n+\cdots+n\right)=\sum_{k=1}^{n} k+n\sum_{k=1}^{n} 1$$

と変形できることを示す。

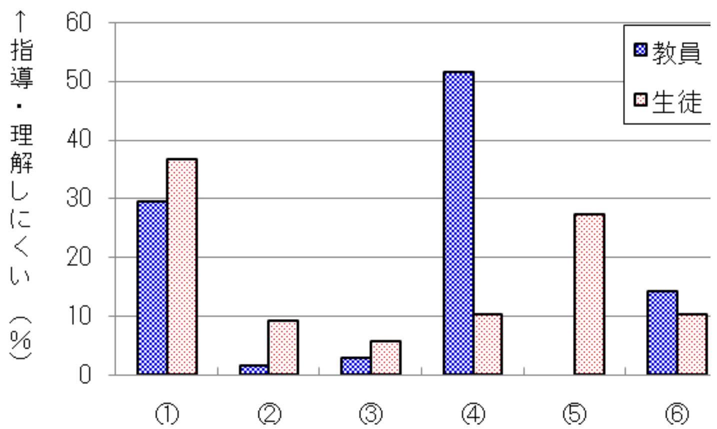
(21) 漸化式に関する内容　　　　　　　　　　　　　　　教員が指導しやすい 35.0%，生徒が理解しやすい 24.1%

【教員用質問】
① 「漸化式」の意味
② $a_{n+1}=2a_n$， $a_1=1$ で表される数列の一般項の求め方の説明
③ $a_{n+1}=a_n+3$， $a_1=1$ で表される数列の一般項の求め方の説明
④ $a_{n+1}=3a_n+2$， $a_1=1$ で表される数列の一般項の求め方の説明(特性方程式など)
⑤ その他　　　　　　　　　　　　⑨ 指導しやすい

【生徒用質問】
① 「漸化式」の意味が分からない
② $a_{n+1}=2a_n$， $a_1=1$ で表される数列の一般項を求められない
③ $a_{n+1}=a_n+3$， $a_1=1$ で表される数列の一般項を求められない
④ $a_{n+1}=3a_n+2$， $a_1=1$ で表される数列の一般項を求められない
⑤ $a_{n+1}=3a_n+2$， $a_1=1$ で表される数列の一般項を機械的に求められるが，理解していない
⑥ その他　　　　　　　　　　　　⑨ 理解しやすい

【集計結果及び分析】

	①	②	③	④	⑤	⑥
教員(%)	29.6%	1.6%	2.9%	51.6%		14.3%
生徒(%)	36.7%	9.3%	5.8%	10.4%	27.4%	10.3%



漸化式に関する内容で,「指導しやすい」と回答した教員は 35.0%,「理解しやすい」と回答した生徒は 24.1%で，教員は指導しにくく，生徒は理解しにくい内容であることが分かる。

教員アンケートから，その半数以上である 51.6%が，④の形の漸化式を指導しにくいという結果であった。これは,「面積と定積分の関係」「加法定理の証明」「軌跡の問題で除く点があるもの」に次いで４番目に高い数値であった。続いて，①の漸化式の意味の説明が指導しにくいようで 29.6%であった。一方で，生徒アンケートから「①漸化式の意味が分からない」が 36.7%，続いて「⑤機械的には解けるが理解していない」という回答が 27.4%であった。教員，生徒の結果から，④のような漸化式を説明する場合，特性方程式の説明がしにくく，最終的に機械的に求めていることが分かった。

【指導上の留意点】

まず, 第 n 項と第 $n+1$ 項の関係で表されている漸化式に, とまどいを感じている生徒が多いので, n に１から順番に数字を代入していき，数列の各項が順次１通りに決まっていくことを実感させることが大切である。そして，既習内容の等差数列，等比数列，階差数列等を漸化式にするとどのような式になるか，実際に作らせると，さらに抵抗感を取り除くことができる。

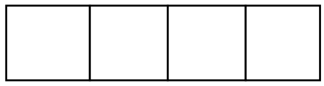
等差数列，等比数列，階差数列の漸化式がどのような式になるか確認できていれば，②，③の形の漸化式が与えられたとき，等比数列，階差数列の漸化式だということで，公式を使って一般項を求め

ることができる。この②，③の漸化式は，解く上で一番重要になるので，丁寧に指導していく必要がある。

また，「$a_{n+1} = pa_n + q$」の形の漸化式を解く過程で，特性方程式を扱う場合は，最初に，特性方程式とは何かを説明して，その有用性を理解させる必要がある。

【具体的な指導法の提案】

$\boxed{\text{その１}}$　**漸化式に慣れる**



n＝４の例

（例）　マッチ棒でｎ個の正方形を作り，横１列に並べる。このときマッチ棒は何本必要ですか。

（解説）正方形が１個のとき，マッチ棒は４本必要。１個正方形を増やすごとに３本マッチ棒が増えるので，$a_n = 3n + 1$ と表される。（中学校で学習済み）

一方，$a_{n+1} = a_n + 3$，$a_1 = 4$ と表すこともできることを使って，漸化式を解かせ，同じ結果であることを確認する。

$\boxed{\text{その２}}$　**「$a_{n+1} = pa_n + q$」の形の漸化式について（特性方程式Ⅰ）**

最初に，$a_{n+1} - t = p(a_n - t)$ の変の漸化式を解く練習をする。

（例）　$a_{n+1} - 2 = 3(a_n - 2)$，$a_1 = 4$　を満たす数列の一般項 a_n を求めよ。

（解説）$b_n = a_n - 2$　とおくことにより，$b_{n+1} = 3b_n$，$b_1 = 2$　という等比数列の漸化式になる。

この形の漸化式を数題，練習し，$a_{n+1} = pa_n + q$　の形の漸化式も，(例)の形に変形できれば解くことができることを理解させる。実際に，$a_{n+1} = 3a_n - 4$　の両辺から２を引くと(例)の形になる。

それでは $a_{n+1} = pa_n + q$　を変形して $a_{n+1} - t = p(a_n - t)$　となるような t を求める方法を考える。

$a_{n+1} = pa_n + q$ の両辺から t を引く。　　　$a_{n+1} - t = pa_n + q - t$

右辺に $p(a_n - t)$ を作る。　　　$a_{n+1} - t = p(a_n - t) + pt + q - t$

よって，$pt + q - t = 0$ を満たす t を求めればよい。この式を変形すると，$t = pt + q$　が得られる。これが，隣接二項間の漸化式における特性方程式である。

$\boxed{\text{その３}}$　**「$a_{n+2} - pa_{n+1} + qa_n = 0$」の形の漸化式について（特性方程式Ⅱ）**

やはり初めに，$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$ の形の漸化式を練習し，この形になるようなαとβを求めることができれば，$a_{n+2} - pa_{n+1} + qa_n = 0$ の形の漸化式を解くことができることを理解させる。それでは，どのようにすればαとβを求めることができるのか考える。

$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$ を展開して左辺にまとめると，$a_{n+2} - (\alpha + \beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0$ となる。

$a_{n+2} - pa_{n+1} + qa_n = 0$ と係数を比較すると，$\begin{cases} \alpha + \beta = p \\ \alpha\beta = q \end{cases}$ となる。つまり，たして p，かけて q となるαとβを求めればいいのだから，２次方程式　$t^2 - pt + q = 0$　の解がαとβということになる。これが，隣接三項間の漸化式における特性方程式である。

（22）数学的帰納法に関する内容　　　　　　　　　　教員が指導しやすい 17.7%，生徒が理解しやすい 25.3%

【教員用質問】

数学的帰納法における以下の手順を（A），（B）とする。

（A）「$n=1$ のとき命題 $P(1)$ が成り立つ」

（B）「$n=k$ のとき命題 $P(k)$ が成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のときの命題 $P(k+1)$ も成り立つ」

① 数学的帰納法の説明　　　　　　　② （B）の部分の説明

③ 数学的帰納法を用いた不等式の証明

④ その他　　　　　　　　　　　　　⑨ 指導しやすい

【生徒用質問】

① 数学的帰納法自体が分からない

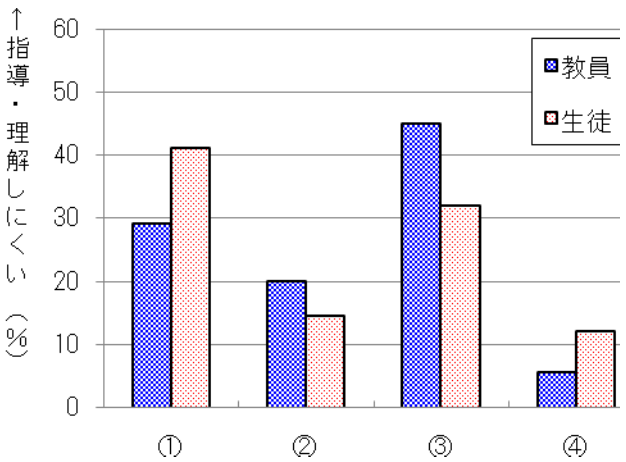
② （A）は分かるが（B）がよく分からない

③ 数学的帰納法を用いた不等式の証明が分からない

④ その他　　　　　　　　　　　　　⑨ 理解しやすい

【集計結果及び分析】

	①	②	③	④
教員（%）	29.3%	20.1%	45.0%	5.6%
生徒（%）	41.2%	14.7%	32.0%	12.1%



数学的帰納法に関する内容で，「指導しやすい」と回答した教員は 17.7%，「理解しやすい」と回答した生徒は 25.3%で，非常に低い結果であった。

具体的には，「①数学的帰納法自体が分からない」と答えた生徒が 41.2%いて，生徒にとっては，(A)，(B)の操作をすることで，自然数に関する命題が真であることが示されたと理解しにくいようである。

一方，教員については，「④数学的帰納法による不等式の証明問題」を指導しにくいと回答した割合が 45%となっている。これは，(B)での仮定をどのように使うかという点で指導しにくいと感じていると思われる。

また，「①数学的帰納法の説明」について指導しにくいと答えた教員は 29.3%であり，数学的帰納法の説明が指導しにくいと感じている人が多いことが分かる。

【指導上の留意点】

「なぜ(A)，(B)の操作をして，与えられた自然数の範囲で命題が成立するのか」を具体的な例で説明し，生徒に数学的帰納法のイメージを付けさせることが大切である(ドミノ倒しの例が有名である)。

また，不等式の場合，成り立つと仮定した $n=k$ のときの式を使っても，証明したい $n=k+1$ のときの式が出てこない場合があるので，何を証明したらいいのかという目標をしっかり定めて解答しなければならない。生徒は論理的な証明が苦手なので，丁寧な解説をして定着を図りたい。

【具体的な指導法の提案】

$\boxed{\text{その１}}$　数学的帰納法の考え方と漸化式の対比

最初に，数学的帰納法のすばらしさを実感させたい。

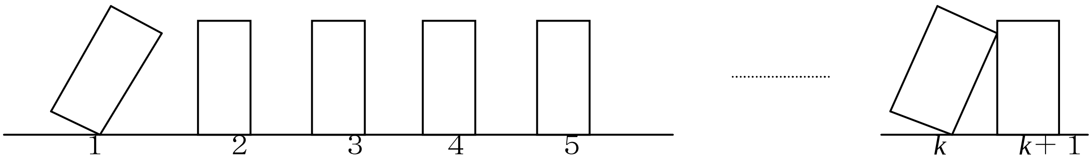
（例）$1+2+3+4+\cdot\ \cdot\ \cdot+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$　がすべての自然数 n で成り立つことを証明せよ。

（解説）n＝１のとき　　（左辺）＝１　　（右辺）$=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=1$

n＝２のとき　　（左辺）＝１＋２＝３　　（右辺）$=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 3=3$

n＝３のとき　　（左辺）＝１＋２＋３＝６　　（右辺）$=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 4=6$

このように順番に計算していくと成り立つことが分かる。しかし，これを続けてもすべての自然数で証明したことにはならない。そこで，数学的帰納法の考え方を説明し，上のようことをしなくても証明できることを理解させる。理解を深めるために，ドミノ倒しの例などを出すとよい。



また，無限個の命題が成り立つこと（すなわち，すべての自然数 n について命題が成り立つこと）を証明することが数学的帰納法であるが，この数学的帰納法の考え方は，数列の漸化式で無限個の項 a_n が決定される過程と似ている。以下のように対比して，さらに理解を深めさせるのもよい。

＊漸化式は，数列｛a_n｝において， (1) n＝1 のとき， すなわち a_1 が分かる。 (2) a_n から a_{n+1} を作る。 すなわち n のときの値から n＋1 のときの値を求める。	＊数学的帰納法は，命題 $P(n)$において (1) n＝1 のとき真である。 すなわち $P(1)$ が成り立つ (2) n＝k のとき真と仮定し，n＝k＋1 を調べる すなわち $P(k)$が成り立つと仮定すると $P(k+1)$ も成り立つ。

$\boxed{\text{その２}}$　不等式の証明について

不等式の証明では,証明したい n＝k＋1 のときの式を,メモ書きでノートの隅に書いておくとよい。そして,「(n＝k＋1 の左辺)－(n＝k＋1 の右辺)」を計算すると分かりやすい。

$\boxed{\text{目標}}$
n＝k＋1　のとき
$3^{k+1}>2(k+1)$
が成り立つことを
示そう。

（例）n が自然数のとき，不等式　$3^n>2n$　が成り立つことを証明せよ。

（証明）

(1) n＝1 のとき，(左辺)＝3，(右辺)＝2　よって n＝1 のとき成り立つ。

(2) n＝k のとき，$3^k>2k$‥‥①　が成り立つとする。

(n＝k＋1 の左辺)－(n＝k＋1 の右辺)

$=3^{k+1}-2(k+1)=3\cdot 3^k-2k-2>3\cdot 2k-2k-2=4k-2$

ここで，k は自然数なので，$4k-2>0$ となる。

したがって，$3^{k+1}>2(k+1)$

これは，n＝k＋1　のときも不等式が成り立つことを示している。

(1)（2）より，すべての自然数 n について，不等式　$3^n>2n$　は成り立つ。

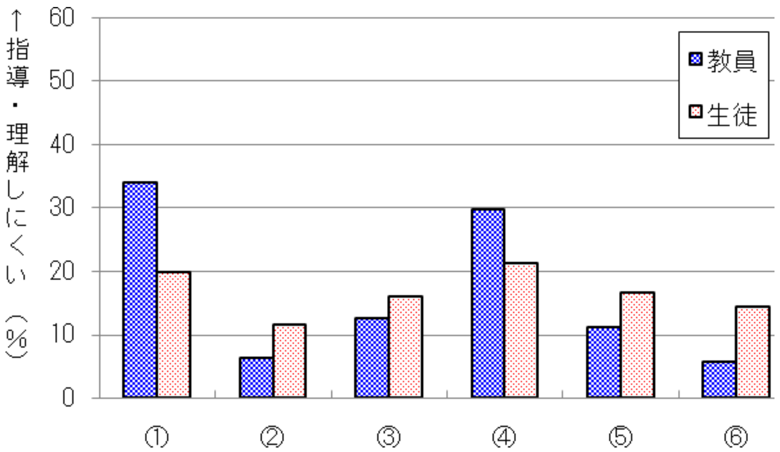
(23) ベクトル方程式に関する内容　　　　教員が指導しやすい 17.7%，生徒が理解しやすい 27.7%

【教員用質問】
① ベクトル方程式の説明
② 点A($\vec{a}$)を通り $\vec{d}$ に平行な直線のベクトル方程式が「$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$」であることの説明
③ ２点A（$\vec{a}$）B（$\vec{b}$）を通る直線のベクトル方程式が「$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$， $s+t=1$」であることの説明
④ ベクトル方程式「$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$」で，$s$ と t の値による p の位置を求める説明
⑤ 点A（$\vec{a}$）を通り $\vec{n}$ に垂直な直線のベクトル方程式が，「$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$」であることの説明
⑥ その他　　　　⑨ 指導しやすい

【生徒用質問】
① 全く分からない。
② 点A($\vec{a}$)を通り $\vec{d}$ に平行な直線のベクトル方程式が「$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$」であることが分からない
③ ２点A（$\vec{a}$）B（$\vec{b}$）を通る直線のベクトル方程式が「$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$， $s+t=1$」であることが分からない
④ ベクトル方程式「$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$」で，$s$ と t の値によって p の位置を求めることができない
⑤ 点A（$\vec{a}$）を通り $\vec{n}$ に垂直な直線のベクトル方程式が，「$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$」であることが分からない
⑥ その他　　　　⑨ 理解しやすい

【集計結果及び分析】

	①	②	③	④	⑤	⑥
教員(%)	34.0%	6.4%	12.7%	29.9%	11.3%	5.7%
生徒(%)	19.8%	11.6%	16.1%	21.4%	16.7%	14.4%



ベクトル方程式に関する内容で，「指導しやすい」と回答した教員は 17.7%で，「理解しやすい」と回答した生徒は 27.7%であった。教員，生徒にとって，指導しにくく，理解しにくい内容であることが分かる。

生徒のアンケートから，理解しにくい点ついては，①から⑥までのすべての設問に約 10%から 20%の回答があり，左のグラフに特徴的な差異はあまり見あたらない。

教員が指導しにくいと感じている点の方が顕著であり，「①ベクトル方程式の説明」が 34.0%，「④平面上の点の存在範囲を求めるような問題の説明」が 29.9%であった。

【指導上の留意点】

生徒は，点P$(x,\ y)$に対して，$y=2x+3$，$y=x^2-4x+3$ のような方程式を与えると，点P$(x,\ y)$の軌跡が，直線とか放物線だと答えることができる。しかし，点Pに対して，ベクトルの方程式

$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$ や $\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$ を与えても，点Ｐの軌跡が何を表すのかすぐに答えられない場合が多い。これは，生徒がベクトルの方程式に不慣れだということもあるが，点Ｐの軌跡を考えていることが分かっていないことに起因する。また，直線のベクトル方程式も，$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$，$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$，$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$（$s+t=1$）などいくつもの形があるため，分からなくなっている可能性もある。

定着を図るため，ベクトルを成分表示して，直線や円になることを確かめるのも一つの方法である。慣れてきたら，「$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$」や「$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$」において，具体的な $s,\ t$ の値に応じて点Ｐがどこに位置するかを確認させ，点Ｐの軌跡を考えさせたい。

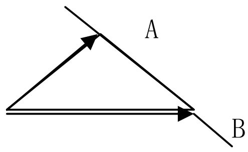
【具体的な指導法の提案】

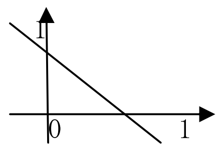
その１　$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ の終点Ｐの位置

$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ の終点Ｐの位置が表す図形との関係を，直交座標での直線・線分・領域と対比すると，イメージがつかみやすくなる。

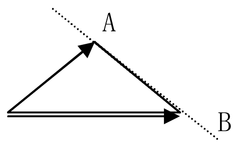
《$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ について》　《座標平面での図形と式》（直交座標）

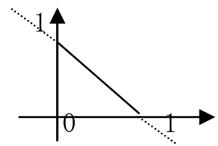
①s＋t＝1 のとき･･･「直線 AB」　①x＋y＝1･･･直線



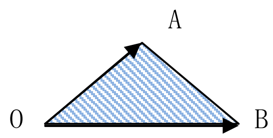


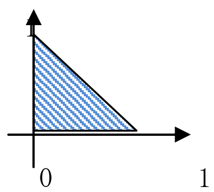
②s＋t＝1，s≧0，t≧0･･･「線分 AB」　②x＋y＝1，x≧0，y≧0･･･線分





③ s + t ≦1，s≧0，t≧0･･･「△0AB の内部と周」③x＋y≦1，x≧0，y≧0･･･領域





その２　コンピュータで確認することにより定着を図る

実際に終点Ｐの動きと，それが描く図形や存在範囲を，コンピュータで確認できるとよい。

愛知県総合教育センターのホームページに「コンピュータを活用する高校数学」のページがあり，ベクトルに関する教材も掲載されている。使用されているのは「Grapes」「Grapes3D」というフリーソフトで，「ベクトルの性質」「終点Ｐの存在範囲」「平面におけるベクトル方程式」の３項目があるので参考にするのもよい。

アドレスは「http://www.apec.aichi-c.ed.jp/shoko/kyouka/math/kensaku2.htm」である。

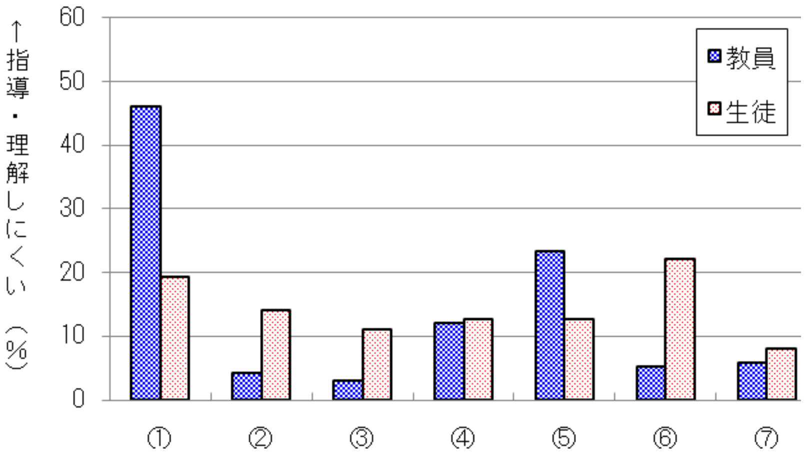
(24) 空間ベクトルに関する内容　　教員が指導しやすい 12.5%，生徒が理解しやすい 15.8%

【教員用質問】
① 空間図形の問題を解くとき，立体のイメージの説明
② 空間ベクトルの内積の説明
③ 空間における位置ベクトルの説明
④ 図形の性質（平行，２点が一致，３点が一直線上など）をベクトルで表現するところの説明
⑤ 「３点が同一平面上にある」をベクトルで表現するところの説明
⑥ 空間座標における球の方程式の説明
⑦ その他　　⑨ 指導しやすい

【生徒用質問】
① 空間図形の問題を解くとき，立体をイメージすることが苦手で図がかけない
② 空間ベクトルの内積に関する問題がよく分からない
③ 空間における位置ベクトルの意味がよく分からない
④ 図形の性質（平行，２点が一致，３点が一直線上など）をベクトルで表現できない
⑤ 「３点が同一平面上にある」をベクトルで表現できない
⑥ 空間座標における球の方程式がよく分からない
⑦ その他　　⑨ 理解しやすい

【集計結果及び分析】

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
教員(%)	46.1%	4.3%	3.1%	12.1%	23.3%	5.3%	5.8%
生徒(%)	19.3%	14.1%	11.1%	12.7%	12.7%	22.1%	8.0%



空間ベクトルに関する内容で,「指導しやすい」と回答した教員は 12.5%,「理解しやすい」と回答した生徒は 15.8%であった。非常に低い結果であった。

この教員の結果は，今回の調査の中で一番低い結果であった。生徒の結果についても，２番目に低い結果であった。

生徒のアンケート結果から,「⑥球の方程式」「①立体のイメージ」が若干高くなっているが，どの設問に対しても同程度の回答があり，設問ごとの差はあまり感じられない。

それに対して，教員アンケートからは，生徒の結果で高かった「⑥球の方程式」は 5.6%と低かったが,「①立体のイメージ」に関しては 46.1%と高い結果であった。生徒との意識に差があることが分かる。教員が次に指導しにくいとしたのは，⑤の３点が同一平面上にあり，平面上の点をその３本のベクトルで表す説明であることが分かった。

【指導上の留意点】

空間における点，直線，平面，球面を理解するために，その図形をイメージさせることは重要である。ただ，簡単にイメージさせるといっても，個々の想像力に差があり，すぐに描けない生徒がいるので，最初のうちは問題を解く前に，図をイメージしてノートに書く練習から始める必要がある。実際に，平行六面体を初めて習うとき，生徒はどこから描いたらいいのか一瞬止まってしまうが，数回描くうちにすぐに描けるようになる。

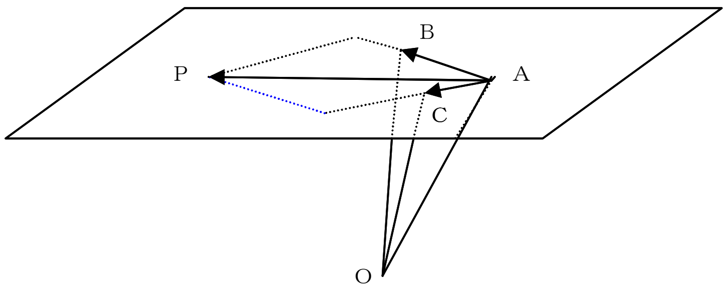
問題文を読んで，最初に図を描かせ，その後，どんな図が分かりやすいか生徒同士で描いた図を見せ合ったりするのもよい。

教員が授業中に板書で丁寧に図を描いてみせることは，生徒に空間の感覚を身につけさせるための大切な手助けとなるので，時間がかかるが丁寧に指導していきたい。模型やコンピュータで立体を提示するのも有効である。

【具体的な指導法の提案】

その１　３点が同一平面上にあり，その平面上の点をその３点の位置ベクトルで表す説明

指３本で下敷きを下から支え，３本の指先を３点Ａ，Ｂ，Ｃに，下敷きを平面に見立て，３点で平面が決定されることを示す。さらに，その下敷きの上の点Ｐへのベクトルは



$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$$

で表される。あとは，位置ベクトルへの変換公式で始点をＯにすると，

$$\vec{p} - \vec{a} = t(\vec{b} - \vec{a}) + s(\vec{c} - \vec{a})$$

$$\vec{p} = (1 - t - s)\vec{a} + t\vec{b} + s\vec{c}$$

よって，$l = 1 - s - t$，$m = t$，$n = s$ とすると，４点が同一平面上にある条件

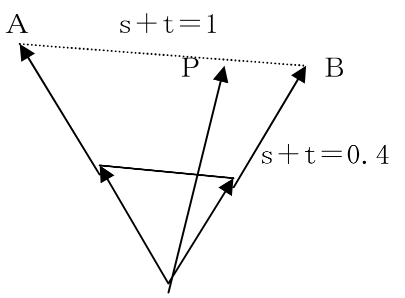
$$\vec{p} = l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c}，\ l + m + n = 1$$

を導くことができる。

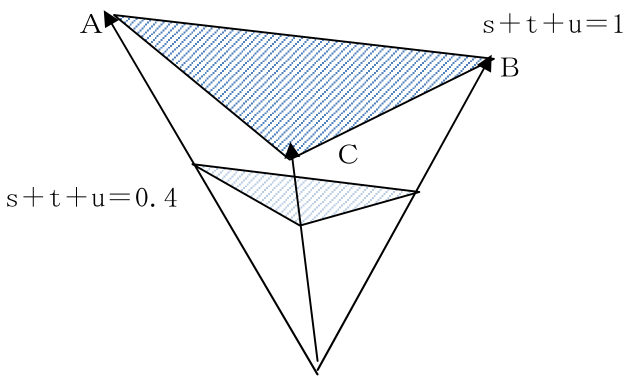
その２　定着を図る工夫

・$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$　（s＋t＝1）と，$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$（s＋t＋u＝1）の対比を図示する。

$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$



$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$



６　今後の課題

今回の予備調査と本調査の結果，生徒が理解しにくい点，教員が指導しにくい点等を知ることができた。しかし，質問項目の選択肢は，我々の経験から挙げたものであって，それ以外にも理解の妨げになっているものがある可能性がある。特に，“その他”の数値が高い内容については，今後，考えられる原因を検討していく必要がある。また，集計結果の分析を受けて，具体的な指導法を数点，提案したが，日頃の授業の経験から，これら以外にも，生徒がつまずくポイントが数多くあることが分かっている。今回の調査結果と多くの経験豊かな先生方の御意見を聞きながら，それらのポイントについてまとめ，指導法を提案していきたい。

新学習指導要領では，今後，社会に出たときに必要な“生きる力”を身に付けるため，今まで以上に数学的活動を取り入れ，思考力，判断力，表現力の育成を重視することが述べられている。また，確率統計も一層大切になるということで，新しい内容が入ってくる。したがって，今までの内容に対する指導法の研究だけでなく，新学習指導要領に書かれている力を身に付けさせるような指導法についても研究し，提案していかなければならない。特に，数学は，平成 24 年から先行実施されるので，これらは早急に取り組むべき課題である。

おわりに

今回，多くの学校に，御協力いただき，数学に関する意識調査を実施することができました。ありがとうございました。この貴重なデータを基にさらに詳細な分析を加えて，今後，多くの先生方に参考となる指導法を発信していきたいと考えております。御協力ありがとうございました。

御協力いただいた学校

旭丘高校	瑞陵高校	明和高校	惟信高校	松蔭高校
昭和高校	名古屋西高校	熱田高校	中村高校	東郷高校
日進西高校	一宮興道高校	津島東高校	尾北高校	江南高校
小牧南高校	丹羽高校	半田東高校	常滑高校	大府高校
大府東高校	知多翔洋高校	阿久比高校	東浦高校	岡崎高校
岡崎北高校	岡崎西高校	刈谷高校	豊野高校	安城東高校
西尾東高校	知立東高校	時習館高校	豊橋東高校	豊丘高校
豊橋南高校	豊橋西高校	国府高校	小坂井高校	御津高校

以上 40 校