

高等学校数学科における言語活動の充実と評価方法に関する研究

今日求められる能力観では、問題解決力、課題発見、判断力・表現力、論理的思考力、分析力・応用力の領域が重視されている。また、高等学校学習指導要領の数学の目標には、冒頭に「数学的活動を通して」とあり、数学的活動をより重視した目標となっている。さまざまな能力を育む観点から、言語活動を充実させた数学的活動と評価の在り方について、研究協力委員が実践しているパフォーマンス評価の取組を例に挙げて提案する。

<検索用キーワード> 高等学校 数学 数学的活動 課題学習 言語活動 パフォーマンス評価
パフォーマンス課題 ルーブリック

指導助言者

筑波大学人間系教育学域教授

清水 美憲

研究会委員

県立明和高等学校教諭

川野 景子(平成26年度)

県立昭和高等学校教諭

酒井 智(平成25, 26年度)

県立中村高等学校教諭

久野 雅人(平成25年度)

県立津島東高等学校教諭

宇野 透(平成25, 26年度)

県立武豊高等学校教諭

竹内 浩人(平成25, 26年度)

県立知立東高等学校教諭

篠原 功一(平成25, 26年度)

県立豊橋西高等学校教諭

和田 裕介(平成26年度)

県立国府高等学校教諭

松坂 知洋(平成25年度)

総合教育センター教科研究室長(現県立時習館高等学校教頭)

齋藤 育浩(平成25年度主務者)

総合教育センター研究指導主事

古関 利勝(平成25, 26年度)

総合教育センター研究指導主事

近藤 哲史(平成26年度主務者)

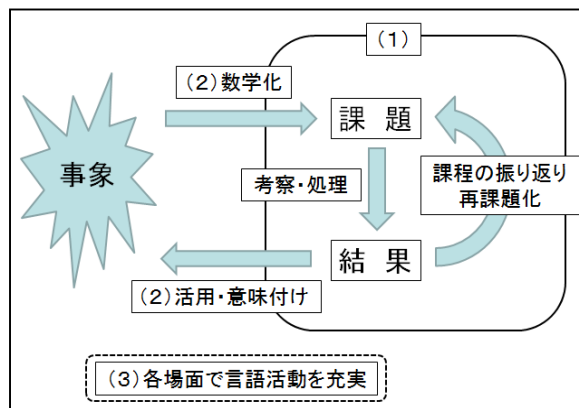
1 はじめに

平成24年度から実施されている高等学校学習指導要領の数学の目標には、「数学的活動を通して、数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め、事象を数学的に考察し表現する能力を高め、創造性の基礎を培うとともに、数学のよさを認識し、それらを積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる。」とあり、数学的活動をより重視した目標となっている。

学習指導要領の第3款3によると、数学的活動とは、

- (1) 自ら課題を見だし、解決するための構想を立て、考察・処理し、その過程を振り返って得られた結果の意義を考えたり、それを発展させたりすること。

図1 数学的活動のイメージ図



(2) 学習した内容を生活と関連付け、具体的な事象の考察に活用すること。

(3) 自らの考えを数学的に表現し根拠を明らかにして説明したり、議論したりすること。

とあり、数学学習に関わる目的意識をもった主体的活動である(図1)。(3)については、グループ学習など言語活動の充実を図る取組が求められる。

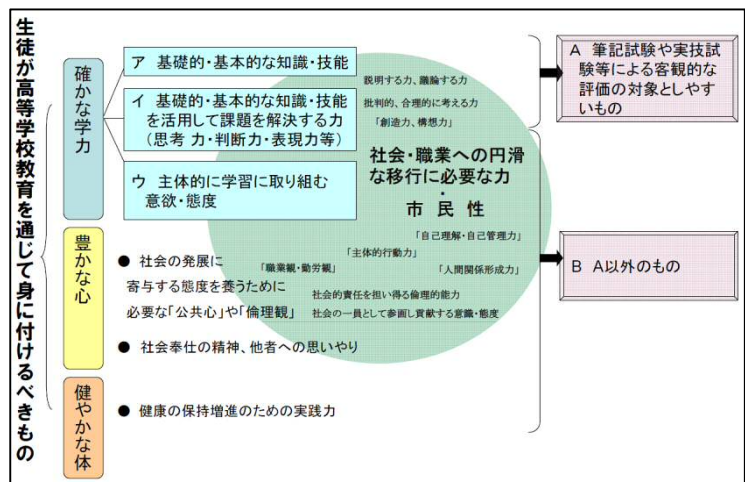
そこで、生徒が主体的に取り組むことのできる数学的活動として、実践的なパフォーマンス評価の研究を進めている。

2 研究の目的

中央教育審議会初等中等教育分科会高等学校教育部会では、全ての生徒が共通に身に付けるべき資質・能力「コア」(図2)を定義し、社会・職業への円滑な移行に必要な力・市民性を身に付けるためには、思考力・判断力・表現力と主体的に学習に取り組む意欲・態度の育成が必要とされている。また、その評価については、筆記試験等による客観的な評価が難しく、ルーブリック等を活用したパフォーマンス評価やポートフォリオ評価などのさまざまな手法の研究が必要であるとしている。

そこで、本研究では、パフォーマンス評価の先行事例の情報を収集し、パフォーマンス評価の方法についてまとめ、各研究協力委員の所属校において実践し、この評価方法の妥当性・信頼性を検証し、生徒の資質・能力の向上を図るためのより効果的な方策について提案する。

図2 「コア」のイメージ図



3 研究の方法

- (1) パフォーマンス評価の先行事例の情報を収集する。
- (2) (1)に基づき、パフォーマンス評価の方法についてまとめる。
- (3) 各研究協力員の所属校において、パフォーマンス評価を実践し、その結果をまとめる。
- (4) (3)に基づき、パフォーマンス評価の妥当性・信頼性を検証する。
- (5) 思考力・判断力・表現力と主体的に学習に取り組む意欲・態度の育成のためのより効果的な指導についてまとめる。

4 研究の内容

(1) パフォーマンス評価

パフォーマンス評価とは、「ある特定の文脈のもとで、さまざまな知識や技能などを用いて行われる人のふるまいや作品を、直接的に評価する」という方法である。具体的には、「パフォーマンス課題」を与えて解決・遂行させ、それを複数の評価者が、「ルーブリック」と呼ばれる評価基準表を用いながら、評価する。知識・スキルを活用・応用・統合することを求める評価手法と言える(図3)。パフォーマンスの質を数値化することにより、子どもたちの学力の状態を把握し、学習指導や学習活動に生かせるようにすることを目的としている。

パフォーマンス課題は、評価したい学力ができるだけ直接的にパフォーマンスとして表れるものにする必要がある。また、パフォーマンスから学力への解釈は主観的な性格を免れないが、恣意的・独断的にはならないようにしなければならない。そのため用いるのがルーブリックである。

ルーブリックは、「成功の度合いを示す数値的な尺度と、それぞれの尺度に見られるパフォーマンスの特徴を示した記述語からなる評価基準表」であり、どのような特徴が見られれば、どのような数値を割り当てていくかを述べたものである。採点に入る前にあらかじめ大まかな素案をつくっておくが、具体的な中身は、採点と同時に書き込んでいく。つまり、パフォーマンス評価には、「ルーブリック作成＝評価基準づくり」というプロセスが含まれる。

(2) 「逆向き設計」の単元設計

教育によって最終的にもたらされる結果から遡って教育を設計する、また通常は指導が行われた後で考えられがちな評価を先に構想する設計を「逆向き設計」という(図4)。

「逆向き設計」により、その教科の中核部分は何か、生徒に身に付けさせたいことは何かを、教師自身が明確に考えることができる。その単元で学ばせたい「重要な知識とスキル」は何か、大人になっても子どもたちに身に付けておいてほしいような「永続的理解」は何か、何ができるようになったら、目指した学力が身に付いたと言えるかなど、その単元で学習した内容を総括して考えるようなパフォーマンス課題をつくることが重要である。単元を始める前に、学習内容とともに評価方法を設定することに大きな特徴がある。

図5には、パフォーマンス課題に取り組みませる際の手順を示した。

(3) 研究協力委員の実践報告

ア 「微分・積分を用いた事象の考察」	県立明和高等学校	教諭	川野 景子
イ 「背理法の有用性と表現力の育成」	県立昭和高等学校	教諭	酒井 智
ウ 「君ならデータをどう活用する？」	県立津島東高等学校	教諭	宇野 透
エ 「三角形の面積の考察を通して、一つの事象を多面的に捉える能力を育む事例」	県立武豊高等学校	教諭	竹内 浩人
オ 「体積を微分すれば面積になる？」	県立知立東高等学校	教諭	篠原 功一
カ 「モンティ・ホール問題を考える」	県立豊橋西高等学校	教諭	和田 裕介

以下に、各研究協力委員の実践を示す。

図3 パフォーマンス評価の構図(松下, 2007)

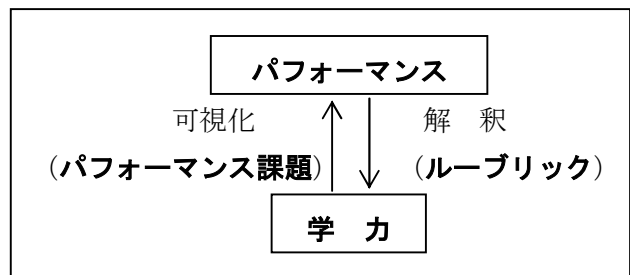


図4 「逆向き設計」論の手続き(三藤・西岡, 2010)

- ①重点目標を検討する
- ②「本質的な問い」を設定する
- ③「永続的理解」を明文化する
- ④パフォーマンス課題のシナリオをつくる
- ⑤ルーブリックを作る

図5 パフォーマンス課題の手順(三藤・西岡, 2010)

- ①単元の初めに見通し(課題の提示)を与える
- ②小問題で練習する
毎時間の授業内容をパフォーマンス課題と関連付け
- ③ルーブリックを示す
何を評価しようとしているかについて、先に共有
- ④パフォーマンス課題に取り組みさせる
自己評価、相互評価の活動をするとより有意義
- ⑤返却したレポートやルーブリックを使って、次回は更にどうしたら向上するか助言する

微分・積分を用いた事象の考察

1 学習活動の概要

(1) 科目・単元

S S H数学Ⅱ（学校設定科目）・微分法と積分法

(2) 単元の目標

微分・積分の考えについて理解し、それらの有用性を認識するとともに、事象の考察に活用できるようにする。

(3) 単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	知識・理解
微分・積分における考え方や体系に関心をもつとともに、数学的な見方や考え方のよさを認識し、それらを事象の考察に活用しようとする。	微分・積分の考え方を身に付けて、具体的な事象を微分・積分を用いて考察することができる。さらに、思考の過程を振り返り、多面的・発展的に考えることができる。	微分・積分を用いて、事象を表現・処理し、推論することができる。	微分・積分の基本的な概念、原理・法則などを体系的に理解し、基礎的な知識を身に付けている。

(4) 取り上げる言語活動と教材（課題）

ア 言語活動

位置（座標）を時間で微分したら速度であるということを確認し、 $v-t$ グラフや $x-t$ グラフからその物体の動きを微分・積分の考えを用いて記述させる。

イ 教材（課題）

ワークシート（資料2 微分・積分に関する発展的なテスト）を与えて、時間を決めて取り組ませる。

(5) 単元の指導計画

微分係数と導関数… 7時間

導関数の応用…………… 8時間

積分法……………14時間

（パフォーマンス課題は最後の時間に実施）

(6) ルーブリック（評価基準表）

ア 「微分・積分に関する発展的なテスト」問題 1 についてのルーブリック

	数学的な見方・考え方	表現
	数学的に筋道立てた考え方をしているか。	考え方をきちんと説明・表現できているか。
5	$x-t$ グラフが正しく記述できている。	物体の動く向きと速度を関連させた表現ができている。（例：加速していく）
3	$t=3$ 及び $t=5$ における x の値を求めることができている。	

2	$0 \leq t \leq 2$ のとき $x = 3t$ $2 < t$ のとき $x = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 15t - \frac{32}{3}$ であることが理解できている。	$t = 3$ 及び $t = 5$ で物体の動く向きが変わることを説明・表現できている。
1	$0 \leq t \leq 2$ のとき $v = 3$ $2 < t$ のとき $v = (t - 4)^2 - 1$ であることが理解できている。	$0 \leq t \leq 2$ のときは等速運動であり, $2 < t$ のときは等速運動ではないことを説明・表現できている。

イ 「微分・積分に関する発展的なテスト」問題 2 についてのルーブリック

	関心・意欲・態度	表現
	数学の論理や体系に関心を持ち, 積極的に活用しているか。	考え方をきちんと説明・表現できているか。
5	$v-t$ グラフが正しく描けている。	位置と速度を関連させた説明・表現ができている。
3	$v-t$ グラフにおいて, 下記以外の t における v の値が理解できている。	
2	$v-t$ グラフにおいて, $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$ における v の値が理解できている。	位置及び速度の説明・表現がそれぞれできている。
1	$v-t$ グラフを描くための軸が描かれている。	物体の動きについて言語による説明・表現ができている (位置の説明ができている)。

2 解説

(1) 指導事例と学習指導要領との関連

「学習指導要領 数学Ⅱ 3内容」には次のように示されている。

(5) 微分・積分の考えについて理解し, それらの有用性について理解するとともに, 事象の考察に活用できるようにする。

本事例では, 微分・積分の考え方が瞬間の速さや位置 (座標) の考察に活用できることを理解することで, 瞬間の速さのグラフや位置 (座標) のグラフから物体の動きを考察しようとすることを意図している。

(2) 言語活動の充実の工夫

本事例では, 考察をする際に, 計算し, グラフを描くだけでなく, 説明や絵等を記述しようとすることを意図している。それにより, 事実を正確に理解し, 説明することにより自分の考えを深めることができる知的活動になると考えた。

3 実践報告

(1) パフォーマンス課題の実施状況

ア 本時の実施状況

クラス 第2学年A組 (男子 19名 女子 20名 合計 39名)

本時の展開

過程	学習活動	指導上の留意点
導入 5分	数学における微分・積分の考え方を復習する。	<ul style="list-style-type: none"> ・微分係数 $f'(a)$ は曲線 $y = f(x)$ において、$x=a$ における接線の傾きになっていることを確認する。 ・定積分と面積の関係を確認する。
展開Ⅰ 20分	1 距離と速度について 2 日常生活における速度に関するグラフ	<ul style="list-style-type: none"> ・具体的な例を用いて $x-t$ グラフを描き、距離を時間で微分すると速度になることを確認する。また、$v-t$ グラフの時間による積分が $x-t$ グラフであることも確認する。 ・微分・積分が日常生活で用いられていることを理解させる。 ・日常生活の事象を説明するためには、「<u>数学的な面 (計算や式及びグラフ)</u>」と「<u>言語的な面 (言葉による表現や絵)</u>」の両方が必要であることを確認させる。
展開Ⅱ 23分	微分・積分に関する発展的なテスト 【パフォーマンス課題】	<ul style="list-style-type: none"> ・このテストは定期考査では測れない数学的及び言語的な能力を測るテストであることを説明する。 ・与えられた① $v-t$ グラフや② $x-t$ グラフから微分・積分の考え方をを用いてどのような事象であるかを考察させる。
まとめ 2分	本時のまとめ	<ul style="list-style-type: none"> ・微分・積分が日常の事象に関連していることを確認させる。

イ 使用したワークシート

「日常生活の微分・積分」(資料1)は導入及び展開Ⅰにおいて使用した。「微分・積分に関する発展的なテスト」(資料2)は展開Ⅱにおいて使用した。また、「微分・積分に関する発展的なテスト」の模範解答を(資料3)に示す。

(2) 評価事例

パフォーマンス課題を実施する前にルーブリック及び解答例(資料3)を作成したが、実際に実施してみると、ルーブリックを超えた表現の記述があることに気付いた。そこで、ルーブリックを超えているが評価できる図・絵や表現があればそれぞれに対して1点加点することにした。そのため、本事例のパフォーマンス課題は、ルーブリックによる観点別の満点が5点のものが4項目あり計20点と、それ以外の評価できる記述に対して点数を加えたものを合わせて、得点とした。

また、評価の途中で、生徒の記述したワークシートを見ながら、① 考え方「 $t=3$ 及び $t=5$ における x の値を求めることができている」ことが重要なポイントであると判断し、点数を3点から4点へと変えることにした(後述の採点シート参照)。

資料1 配布プリント1

日常生活の微分・積分

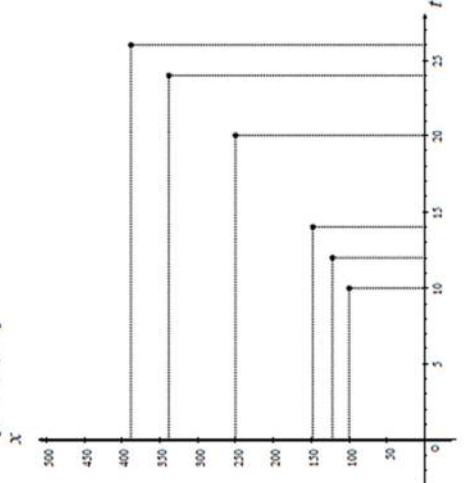
(1) 微分とは？ 積分とは？

(2) 位置(座標)と速度について

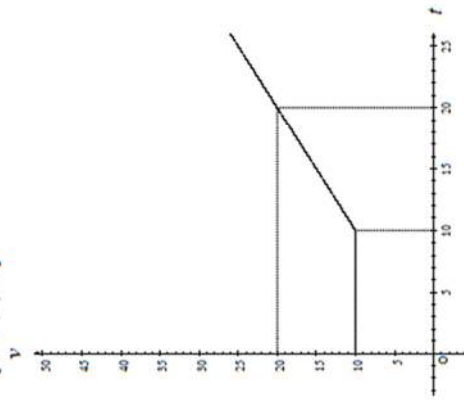


右向きを正とし、1目盛りを1mとし途中の10目盛りまでは1秒に1目盛りずつ進み、その後1[m/s]²ずつ加速していくものとします。以下に、変位と時間の関係を表すx-tグラフ、速度と時間の関係を表すv-tグラフを以下に示します。

【x-t グラフ】



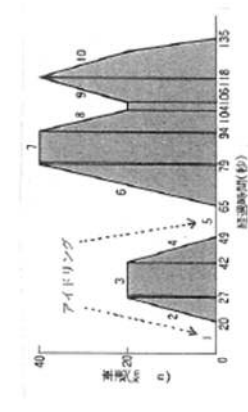
【v-t グラフ】



2年()組()番名前()

(3) 日常生活における速度に関するグラフ(その1)

【10モード燃費走行パターン】



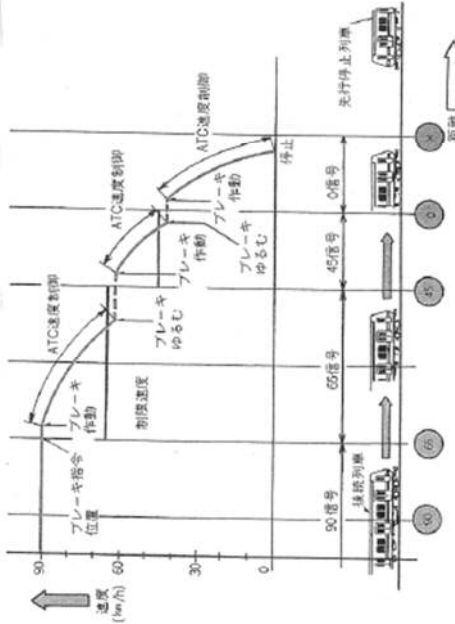
10モード燃費とは、運輸省が形式認定車の排出ガスレベルと同時に測定して発表する数値で、定地走行燃費にくらべれば、より日常的・現実的な燃費率といえる。10モードというのは、10とおりの走りかたを設定したパターン(図形)のことで、図に示したような形の線図となる。

そしてこのパターンは次のような意味をもっている。縦軸が車速、横軸が時間をあらわすので、

- ①20秒間アイドリング運転をした後、②スタートして7秒間で20km/hまで加速し、③20km/hで15秒走り、④7秒で減速停止し、⑤16秒間アイドリングをした後、⑥14秒間に40km/hまで加速し、⑦40km/hで15秒走行する……という、ひとつの日常的な走行状態にしたもの。

(4) 日常生活における速度に関するグラフ(その2)

【ATCによる運転モード】



自動列車制御装置(ATC:オートマチック・トレイン・コントロール)

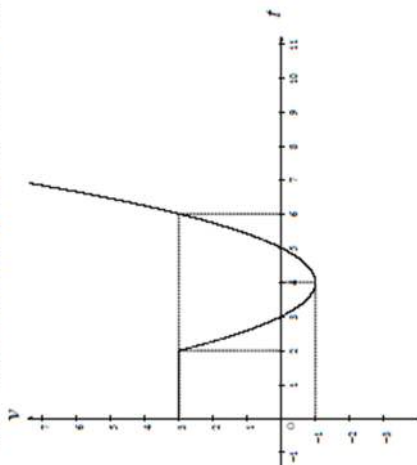
新幹線では開業当初から採用され、安全性や信頼性の点で非常に優れたシステムであることが実証されている。常時指示速度を現示して、オーバースピードに対しては運転士の捜査によらず、自動的に適正なブレーキを作動させ、現示速度に調節し、そのまま運転が継続できるようにしている。

出典

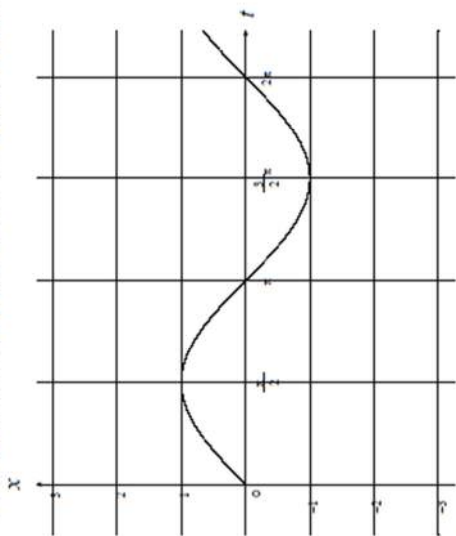
- ・ 出射忠明(1985) 自動車メカニズム図鑑, グランプリ出版
- ・ 伊原一夫(1987) 鉄道車両メカニズム図鑑, グランプリ出版

微分・積分に関する発展的なテスト

- ① ある物体の $v-t$ グラフは以下のようにになっている。この物体はどのような動きをしているか、微分・積分の考えを用いて説明せよ。ただし、 $t=0$ において物体は $x=0$ にいるものとする。



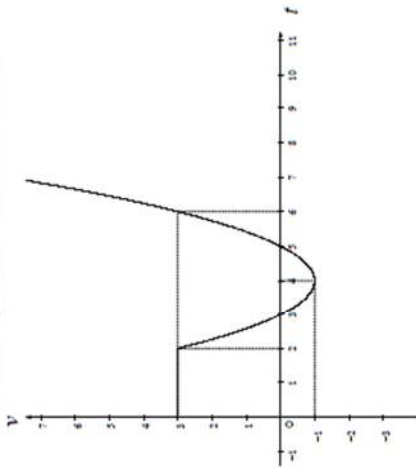
- ② ある物体の $x-t$ グラフは以下のようにになっている。この物体はどのような動きをしているか、速度の情報を変えて説明せよ。ただし、 $t=0$ における接線の傾きは 1 である。



資料3 模範解答

微分・積分に関する発展的なテスト (解答例)

- ① ある物体の $v-t$ グラフは以下のようなになっている。この物体はどのような動きをしているか、微分・積分の考えを用いて説明せよ。ただし、 $t=0$ において物体は $x=0$ にいるものとする。



【解答例】

t 秒後における位置を x とする。

(i) $0 \leq t \leq 2$ のとき

$$x = \int v dt = \int 3t dt = 3t + C$$

$x=0$ のとき $t=0$ より $C=0$

よって、 $x=3t$

(ii) $2 \leq t$ のとき

$$x = \int v dt = \int ((t-4)^2 - 1) dt = \int (t^2 - 8t + 15) dt$$

$$= \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 15t + C$$

$$t=2 \text{ のとき } x=6 \text{ より } C = -\frac{32}{3}$$

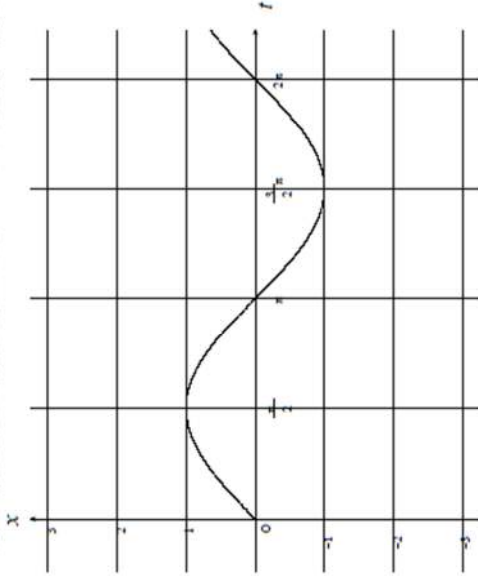
$$\text{よって、} x = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 15t - \frac{32}{3}$$

t	2	...	3	...	5	...
$v(t)$	(3)	+	0	-	0	+
$x(t)$	6	7	$\frac{22}{3}$	7	6	7

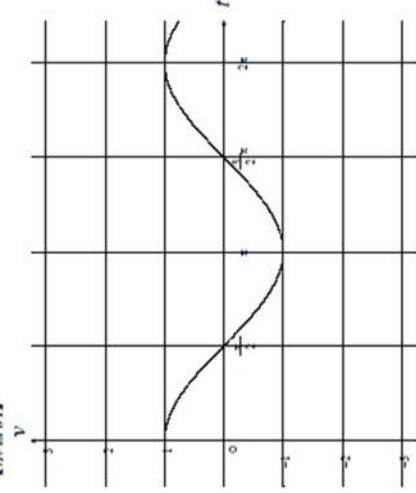
《説明》

2秒間正方向に等速運動して6まで進み、その後ゆるやかに減速し3秒後 $\frac{22}{3}$ に到達する。その後、逆向きに動き出す。加速するが減速し5秒後に6に到達する。ここでまた向きを変えてどんどんと加速し続ける。

- ② ある物体の $x-t$ グラフは以下のようなになっている。この物体はどのような動きをしているか、速度の情報を交えて説明せよ。ただし、 $t=0$ における接線の傾きは1である。



【解答例】



《説明》

物体は位置0から1へ移動し、向きを変え-1へ移動し、また向きを変えて1へ向かう。位置1及び-1の間では速度は0に近づき、向きを変えた後は加速し位置0においてトップスピードとなる。

以下にパフォーマンス課題への生徒の取組とその評価例を六つ挙げる。採点シートの○をつけたところが、それぞれの生徒の記述したワークシートの観点別の評価である。実際に生徒が記述したワークシートは、(資料4) から (資料9) に示す。

ア 予想された解答 (資料4)

ループリックを超えない解答であったため評価しやすかった。

【採点シート】

問題 1 についての評価基準表 (ループリック)		問題 2 についての評価基準表 (ループリック)	
数学的な見方・考え方	表現	関心・意欲・態度	表現
数学的に筋道立てた考え方をしているか。	考え方をきちんと説明・表現できているか。	数学の論理や体系に関心をもち、積極的に活用しているか。	考え方をきちんと説明・表現できているか。
5 $x-t$ グラフが正しく記述できている。	物体の動く向きと速度を関連させた表現ができている。	5 $v-t$ グラフが正しく描けている。	位置と速度を関連させた説明・表現ができている。
4 変更 $t=3$ 及び $t=5$ における x の値を求めることができている。		3 $v-t$ グラフにおいて、下記以外の t における v の値が理解できている。	
2 $0 \leq t \leq 2$ のとき、 $2 < t$ のとき それぞれの x を求めることができている。	$t=3$ 及び $t=5$ で物体の動く向きが変わることを説明・表現できている。	2 $v-t$ グラフにおいて、分かりやすい t における v の値が理解できている。	位置及び速度の説明・表現がそれぞれできている。
1 $0 \leq t \leq 2$ のとき $v=3$ $2 < t$ のとき $v=(t-4)^2-1$ であることが理解できている。	$0 \leq t \leq 2$ のときは等速運動であり、 $2 < t$ のときは等速運動ではないことを説明・表現できている。	1 $v-t$ グラフを描くための軸が描かれている。	物体の動きについて言語による説明・表現がある (位置の説明ができている)。
加点		加点 1 $x = \sin t$ という記述あり	

イ 言語的な表現のない解答 (資料5)

1 からこの生徒は与えられたグラフがどんな物体の動きを表しているかを理解していないと思われる。その一方、2 から数学的な考え方に基づいて判断しようとする力を有していることもわかる。

【採点シート】

問題 1 についての評価基準表 (ループリック)		問題 2 についての評価基準表 (ループリック)	
数学的な見方・考え方	表現	関心・意欲・態度	表現
数学的に筋道立てた考え方をしているか。	考え方をきちんと説明・表現できているか。	数学の論理や体系に関心をもち、積極的に活用しているか。	考え方をきちんと説明・表現できているか。
5 $x-t$ グラフが正しく記述できている。	物体の動く向きと速度を関連させた表現ができている。	5 $v-t$ グラフが正しく描けている。	位置と速度を関連させた説明・表現ができている。
4 変更 $t=3$ 及び $t=5$ における x の値を求めることができている。		3 $v-t$ グラフにおいて、下記以外の t における v の値が理解できている。	
2 $0 \leq t \leq 2$ のとき、 $2 < t$ のとき それぞれの x を求めることができている。	$t=3$ 及び $t=5$ で物体の動く向きが変わることを説明・表現できている。	2 $v-t$ グラフにおいて、分かりやすい t における v の値が理解できている。	位置及び速度の説明・表現がそれぞれできている。
1 $0 \leq t \leq 2$ のとき $v=3$ $2 < t$ のとき $v=(t-4)^2-1$ であることが理解できている。	$0 \leq t \leq 2$ のときは等速運動であり、 $2 < t$ のときは等速運動ではないことを説明・表現できている。	1 $v-t$ グラフを描くための軸が描かれている。	物体の動きについて言語による説明・表現がある (位置の説明ができている)。
加点		加点 1 $x = t(t-\pi)(t-2\pi)$ という記述あり	

ウ 数学的な表現のない解答 (資料6)

この生徒はグラフが表す物体の動きは理解しているが、微分・積分の考え方に応用できていないことがわかる。

【採点シート】

問題 1 についての評価基準表 (ルーブリック)		問題 2 についての評価基準表 (ルーブリック)			
	数学的な見方・考え方	表現	関心・意欲・態度	表現	
	数学的に筋道立てた考え方をしているか。	考え方をきちんと説明・表現できているか。	数学の論理や体系に関心をもち、積極的に活用しているか。	考え方をきちんと説明・表現できているか。	
5	$x-t$ グラフが正しく記述できている。	物体の動く向きと速度を関連させた表現ができている。	5	$v-t$ グラフが正しく描けている。	位置と速度を関連させた説明・表現ができている。
4 変更	$t=3$ 及び $t=5$ における x の値を求めることができている。		3	$v-t$ グラフにおいて、下記以外の t における v の値が理解できている。	
2	$0 \leq t \leq 2$ のとき、 $2 < t$ のとき それぞれの x を求めることができている。	$t=3$ 及び $t=5$ で物体の動く向きが変わることを説明・表現できている。	2	$v-t$ グラフにおいて、分りやすい t における v の値が理解できている。	位置及び速度の説明・表現がそれぞれできている。
1	$0 \leq t \leq 2$ のとき $v=3$ $2 < t$ のとき $v=(t-4)^2-1$ であることが理解できている。	$0 \leq t \leq 2$ のときは等速運動であり、 $2 < t$ のときは等速運動ではないことを説明・表現できている。	1	$v-t$ グラフを描くための軸が描かれている。	物体の動きについて言語による説明・表現がある (位置の説明ができている)。
加点			加点		

エ 定積分で学んだことを生かそうとしている解答 (資料7)

1 からこの生徒は移動距離 (位置) を定積分を用いて説明しようとしている。

【採点シート】

問題 1 についての評価基準表 (ルーブリック)		問題 2 についての評価基準表 (ルーブリック)			
	数学的な見方・考え方	表現	関心・意欲・態度	表現	
	数学的に筋道立てた考え方をしているか。	考え方をきちんと説明・表現できているか。	数学の論理や体系に関心をもち、積極的に活用しているか。	考え方をきちんと説明・表現できているか。	
5	$x-t$ グラフが正しく記述できている。	物体の動く向きと速度を関連させた表現ができている。	5	$v-t$ グラフが正しく描けている。	位置と速度を関連させた説明・表現ができている。
4 変更	$t=3$ 及び $t=5$ における x の値を求めることができている。		3	$v-t$ グラフにおいて、下記以外の t における v の値が理解できている。	
2	$0 \leq t \leq 2$ のとき、 $2 < t$ のとき それぞれの x を求めることができている。	$t=3$ 及び $t=5$ で物体の動く向きが変わることを説明・表現できている。	2	$v-t$ グラフにおいて、分りやすい t における v の値が理解できている。	位置及び速度の説明・表現がそれぞれできている。
1	$0 \leq t \leq 2$ のとき $v=3$ $2 < t$ のとき $v=(t-4)^2-1$ であることが理解できている。	$0 \leq t \leq 2$ のときは等速運動であり、 $2 < t$ のときは等速運動ではないことを説明・表現できている。	1	$v-t$ グラフを描くための軸が描かれている。	物体の動きについて言語による説明・表現がある (位置の説明ができている)。
加点			加点 1		単振動に関連した内容の記述あり

オ 評価しにくい解答 (資料8)

この生徒は $v-t$ グラフを近似して定めていることから、問題に対して的確に表現しようとしていることがわかる。その一方、**1** では計算ミスをしていて、**2** では物体の動きについて「単振動」としか表現がないため、評価しにくかった。

【採点シート】

問題 1 についての評価基準表 (ルーブリック)		問題 2 についての評価基準表 (ルーブリック)			
	数学的な見方・考え方	表現		関心・意欲・態度	表現
	数学的に筋道立てた考え方をしているか。	考え方をきちんと説明・表現できているか。		数学の論理や体系に関心をもち、積極的に活用しているか。	考え方をきちんと説明・表現できているか。
5	$x-t$ グラフが正しく記述できている。	物体の動く向きと速度を関連させた表現ができている。	5	$v-t$ グラフが正しく描かれている。	位置と速度を関連させた説明・表現ができている。
4 変更	$t=3$ 及び $t=5$ における x の値を求めることができている。		3	$v-t$ グラフにおいて、下記以外の t における v の値が理解できている。	
2	$0 \leq t \leq 2$ のとき、 $2 < t$ のとき それぞれの x を求めることができている。	$t=3$ 及び $t=5$ で物体の動く向きが変わることを説明・表現できている。	2	$v-t$ グラフにおいて、分りやすい t における v の値が理解できている。	位置及び速度の説明・表現がそれぞれできている。
1	$0 \leq t \leq 2$ のとき $v=3$ $2 < t$ のとき $v=(t-4)^2-1$ であることが理解できている。	$0 \leq t \leq 2$ のときは等速運動であり、 $2 < t$ のときは等速運動ではないことを説明・表現できている。	1	$v-t$ グラフを描くための軸が描かれている。	物体の動きについて言語による説明・表現がある (位置の説明ができている)。
加点 2	3点を通るから放物線と近似と増減表が記述されている		加点 1	$x = \sin t$ と近似という記述あり	単振動という記述あり

カ 予想を超えた解答 (資料9)

1 では具体的な数値を用いた説明がないため「考え方」では0点と評価したが、位置・速度・加速度の関係を理解しているため1点加点した。

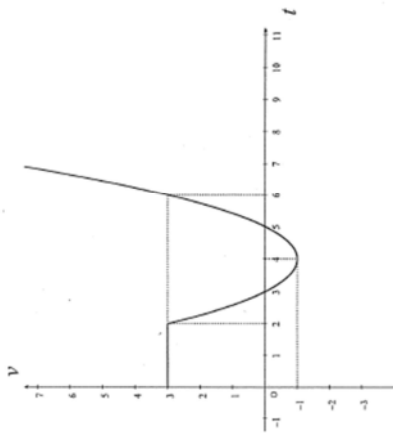
【採点シート】

問題 1 についての評価基準表 (ルーブリック)		問題 2 についての評価基準表 (ルーブリック)			
	数学的な見方・考え方	表現		関心・意欲・態度	表現
	数学的に筋道立てた考え方をしているか。	考え方をきちんと説明・表現できているか。		数学の論理や体系に関心をもち、積極的に活用しているか。	考え方をきちんと説明・表現できているか。
5	$x-t$ グラフが正しく記述できている。	物体の動く向きと速度を関連させた表現ができている。	5	$v-t$ グラフが正しく描かれている。	位置と速度を関連させた説明・表現ができている。
4 変更	$t=3$ 及び $t=5$ における x の値を求めることができている。		3	$v-t$ グラフにおいて、下記以外の t における v の値が理解できている。	
2	$0 \leq t \leq 2$ のとき、 $2 < t$ のとき それぞれの x を求めることができている。	$t=3$ 及び $t=5$ で物体の動く向きが変わることを説明・表現できている。	2	$v-t$ グラフにおいて、分りやすい t における v の値が理解できている。	位置及び速度の説明・表現がそれぞれできている。
1	$0 \leq t \leq 2$ のとき $v=3$ $2 < t$ のとき $v=(t-4)^2-1$ であることが理解できている。	$0 \leq t \leq 2$ のときは等速運動であり、 $2 < t$ のときは等速運動ではないことを説明・表現できている。	1	$v-t$ グラフを描くための軸が描かれている。	物体の動きについて言語による説明・表現がある (位置の説明ができている)。
加点 1	$a=v'$ のグラフが描かれている		加点 1	加速度のグラフが描かれている	バネや地震などの波という記述あり

資料4 生徒の記述したワークシート ア 予想された解答

微分・積分に関する発展的なテスト

1 ある物体の $v-t$ グラフは以下のようなになっている。この物体はどのような動きをしているか、微分・積分の考えを用いて説明せよ。ただし、 $t=0$ において物体は $x=0$ にいるものとする。



(i) $0 \leq t < 3$ のとき $v=3$

$$x = \int v dt = \int 3 dt = 3t + C$$

$$t=2 \text{ のとき } x=6 \text{ より,}$$

$$6 = 3 \times 2 + C$$

$$C=0$$

$$\text{よって, } x=3t$$

(ii) $2 \leq t < 5$ のとき $v = t^2 - 8t + 15$

$$x = \int v dt$$

$$= \int (t^2 - 8t + 15) dt$$

$$= \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 15t + C$$

$$t=2 \text{ のとき } x=6 \text{ より,}$$

$$6 = \frac{8}{3} - 16 + 30 + C$$

$$18 = 8 - 48 + 45 + 3C$$

$$3C = -32$$

$$C = -\frac{32}{3}$$

$$\text{よって, } x = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 15t - \frac{32}{3}$$

$$x' = t^2 - 8t + 15 = (t-3)(t-5)$$

$$= (t-3)(t-5)$$

t	\dots	3	\dots	5	\dots
x'	$+$	0	$-$	0	$+$
x	\nearrow	$\frac{32}{3}$	\searrow	6	\nearrow

$$0 \leq t < 3 \text{ では } v=3 \text{ の等速直線運動。}$$

$$2 \leq t < 3 \text{ では } v \text{ が } t \text{ に減速し、} t=3 \text{ のとき}$$

$$\text{止まる。}$$

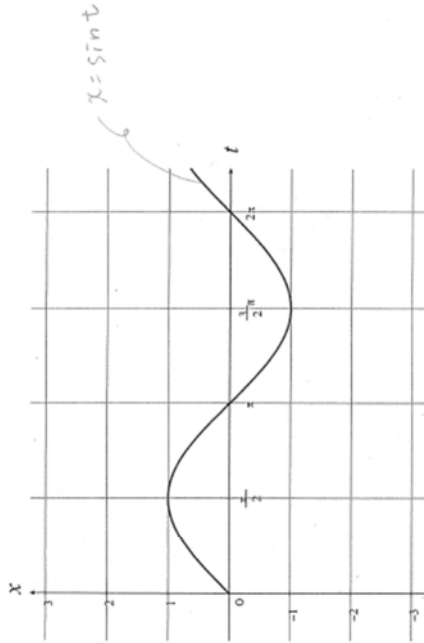
$$3 < t < 5 \text{ では } v \text{ が } t \text{ に加速しているが、} t=5 \text{ のとき}$$

$$\text{止まる。}$$

$$5 < t \text{ は加速している。}$$



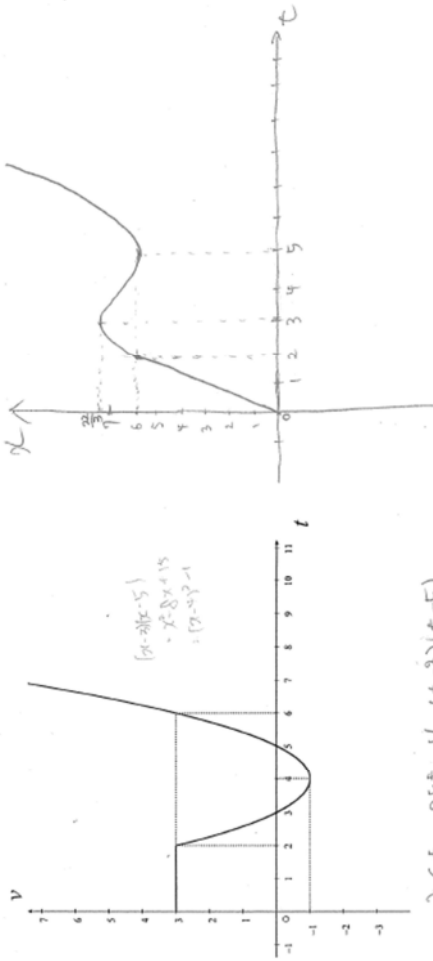
2 ある物体の $x-t$ グラフは以下のようなになっている。この物体はどのような動きをしているか、速度の情報を交えて説明せよ。ただし、 $t=0$ における接線の傾きは1である。



資料5 生徒の記述したワークシート イ 言語的な表現のない解答

微分・積分に関する発展的なテスト

1 ある物体の $v-t$ グラフは以下のようなになっている。この物体はどのような動きをしているか、微分・積分の考えを用いて説明せよ。ただし、 $t=0$ において物体は $x=0$ にいるものとする。



$$2 < t < 5 \quad v = (t-3)(t-5) = t^2 - 8t + 15$$

$$x = \int (t^2 - 8t + 15) dt = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 15t + C$$

$$\Rightarrow t=0, x=0 \Rightarrow C=0$$

$$6 = \frac{1}{3} \times 8^3 - 4 \times 8^2 + 15 \times 8 + C$$

$$C = 6 - \frac{512}{3} + 32 - 120 = -\frac{32}{3}$$

$$x = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 15t - \frac{32}{3}$$

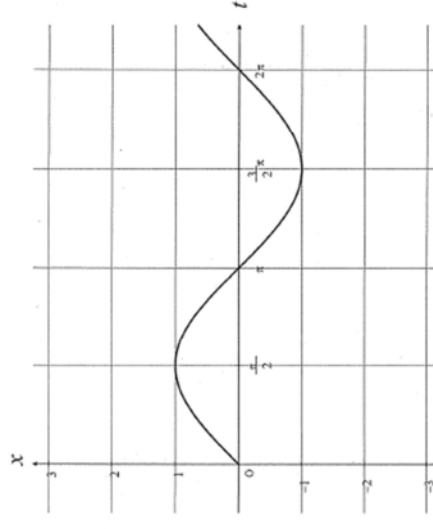
$$x = t^3 - 12t^2 + 45t - \frac{32}{3}$$

$$x = 0 \text{ at } t = 4, 5$$

$$x = 100 + 15 \times 5 - \frac{93}{3} - 25 \times \frac{15}{3} - \frac{18}{3} = 6$$

$$\frac{8}{3} - 16 + 20 - \frac{32}{3} = 9 - 26 + 45 - \frac{32}{3} = 18 - \frac{22}{3} = \frac{32}{3}$$

2 ある物体の $x-t$ グラフは以下のようなになっている。この物体はどのような動きをしているか、速さの情報を変えて説明せよ。ただし、 $t=0$ における接線の傾きは 1 である。

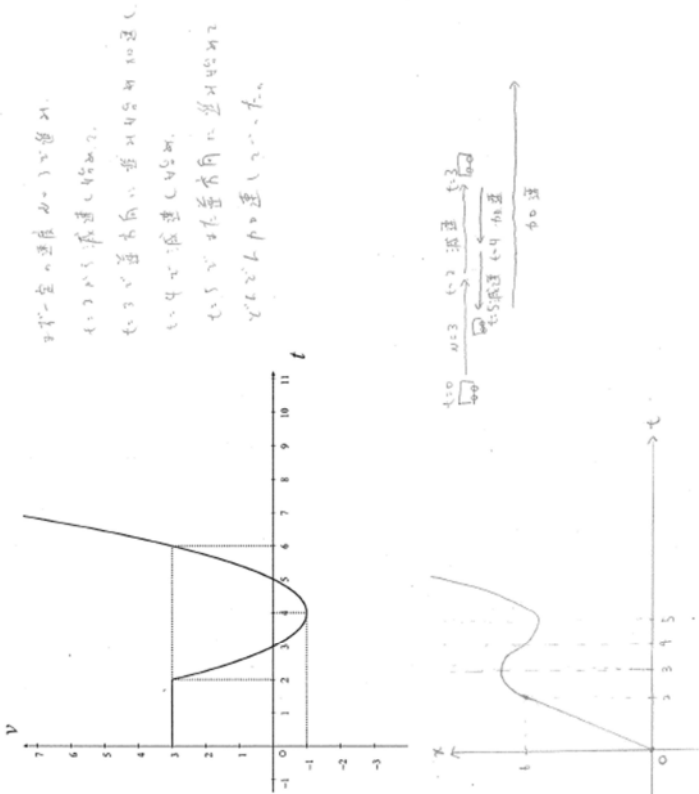


$$x = t(t-\pi)(t-2\pi) = t^3 - 3t^2\pi + 2t\pi^2$$

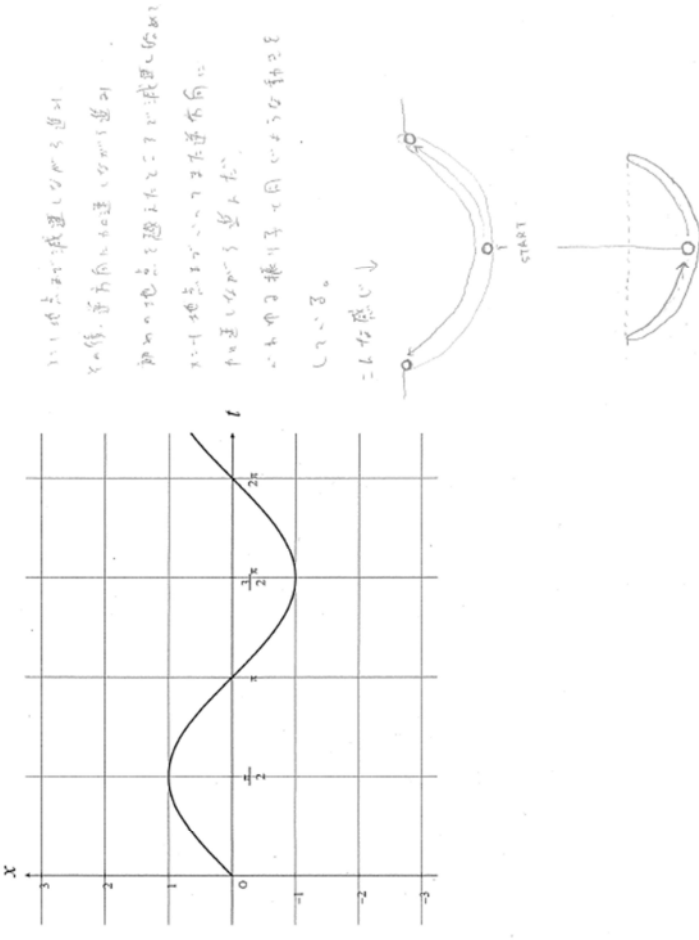
資料6 生徒の記述したワークシート ウ 数学的な表現のない解答

微分・積分に関する発展的なテスト

① ある物体の $v-t$ グラフは以下のようなになっている。この物体はどのような動きをしているか、微分・積分の考えを用いて説明せよ。ただし、 $t=0$ において物体は $x=0$ にいるものとする。



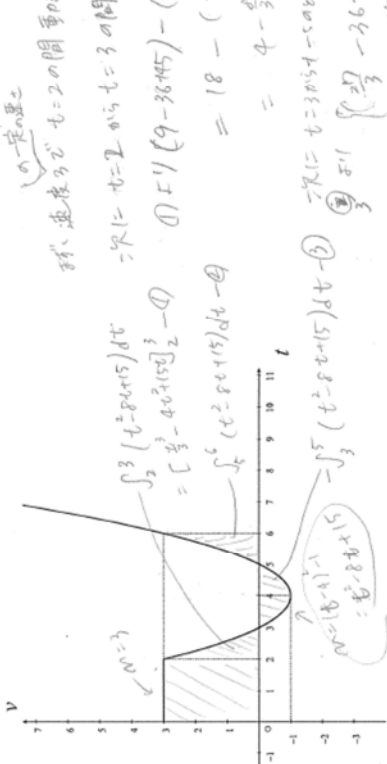
② ある物体の $x-t$ グラフは以下のようなになっている。この物体はどのような動きをしているか、速度の情報を交えて説明せよ。ただし、 $t=0$ における接線の傾きは1である。



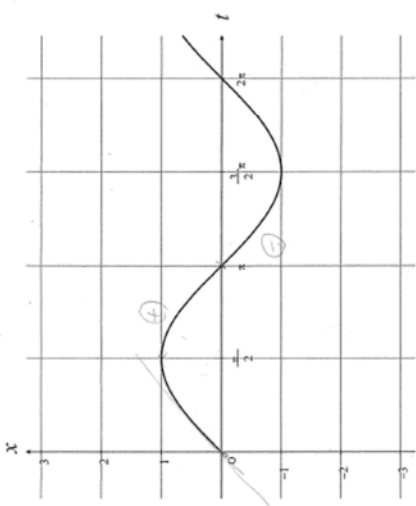
資料7 生徒の記述したワークシート エ 定積分で学んだことを生かそうとしている解答

微分・積分に関する発展的なテスト

1 ある物体の $v-t$ グラフは以下のようになっている。この物体はどのような動きをしているか。微分・積分の考えを用いて説明せよ。ただし、 $t=0$ において物体は $x=0$ にいるものとする。

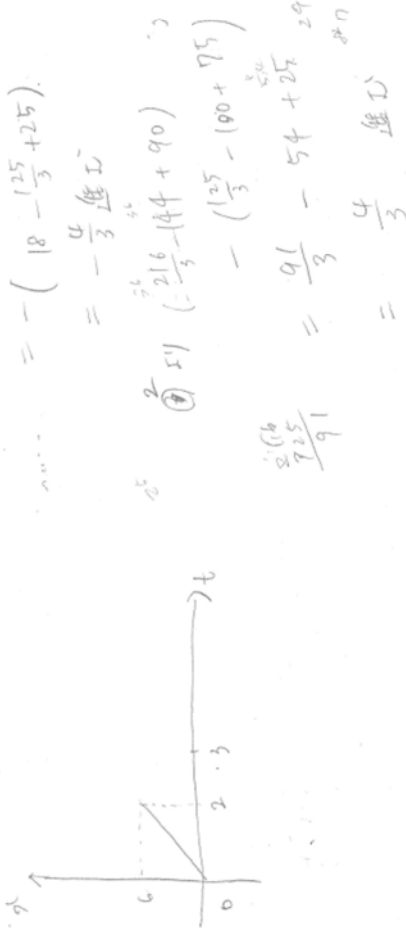


2 ある物体の $x-t$ グラフは以下のようになっている。この物体はどのような動きをしているか。速さの情報を変えて説明せよ。ただし、 $t=0$ における接線の傾きは1である。

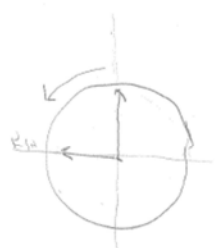


2 ある物体の $x-t$ グラフは以下のようになっている。この物体はどのような動きをしているか。速さの情報を変えて説明せよ。ただし、 $t=0$ における接線の傾きは1である。

$v = \frac{dx}{dt}$ $x = 1$ とおく
 $t = \pi$ で $v = 0$
 (1) x は $t = \pi$ で最大。
 (2) x は $t = 2\pi$ で最小。
 $x = \sin t$ のグラフ?



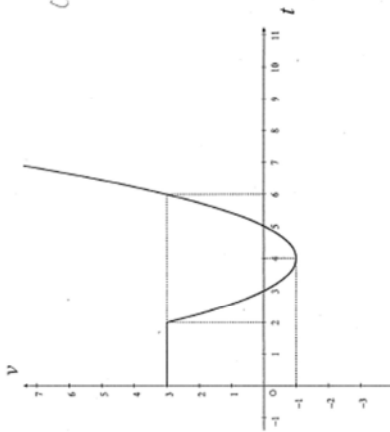
時間 t の変化 単位元 E だと
 3時と9時 $t=0$ には $t=12$ 時だと、6時 $t=6$ 時と、
 時間は7時より正しく半時計回り移動。
 16時、速度変化は一定で進む。



資料8 生徒の記述したワークシート オ 評価しにくい解答

微分・積分に関する発展的なテスト

① ある物体の $v-t$ グラフは以下のようなになっている。この物体はどのような動きをしているか、微分・積分の考えを用いて説明せよ。ただし、 $t=0$ において物体は $x=0$ にいるものとする。



物体の位置を x とおく
(1) $0 \leq t \leq 2$ のとき

$$v = 3$$

$$x = \int_0^t 3 dt$$

$$= [3t]_0^t$$

$$= 3t$$

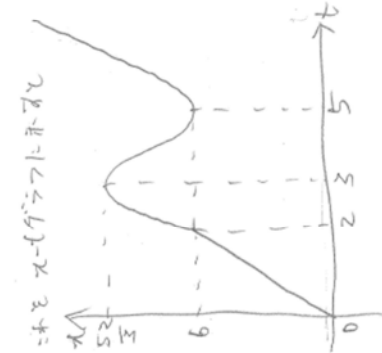
(ii) $2 \leq t < 4$ のとき $v-t$ グラフは $(0,0), (2,3), (4,-1), (6,3)$ を通過する
故に物体は近似できるため、 $v = t^2 - 8t + 15$ (計算用) とおける

$$x = 3 \times 2 + \int_2^t (t^2 - 8t + 15) dt$$

$$= 6 + \left[\frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 15t \right]_2^t$$

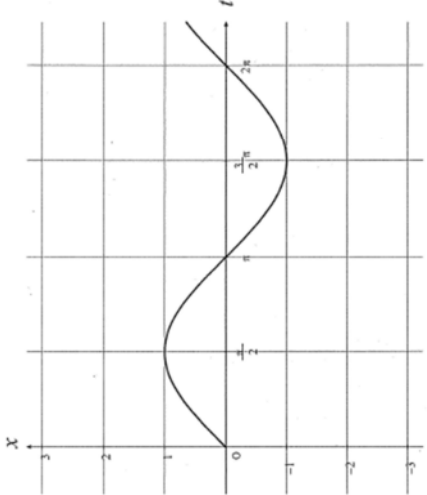
$$= \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 15t - \frac{22}{3}$$

(iii) (i) 時 $x = \begin{cases} 3t & (0 \leq t \leq 2) \\ \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 15t - \frac{22}{3} & (2 < t) \end{cases}$
連続性



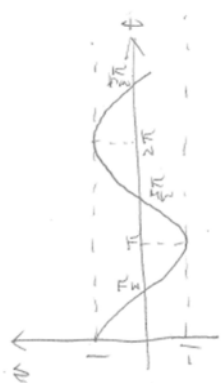
以上より物体は $0 \leq t < 2$ に右へは等速直線運動を続け、 $t=2$ で $v=3$ に達し、 $2 < t < 4$ に右へは本向きに移動して、 $t=3$ で $x=6$ のところへ向かい、 $3 < t < 5$ に右へは左向きに移動して、 $t=5$ で $x=0$ のところへ向かい、 $5 < t < 7$ に右向きに移動する。

② ある物体の $x-t$ グラフは以下のようなになっている。この物体はどのような動きをしているか、速度の情報を交えて説明せよ。ただし、 $t=0$ における接線の傾きは1である。



このグラフを $x = A \sin t$ ($t \geq 0$) と近似する

$$v = \cos t$$



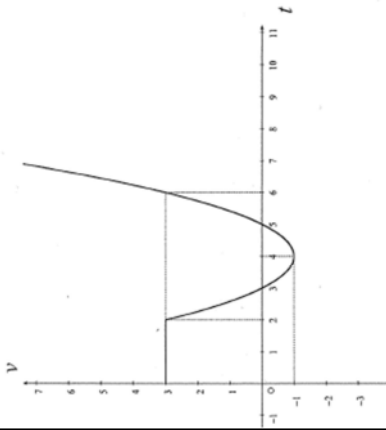
このグラフは $x = A \sin t$ と近似する

物体は $-1 \leq x \leq 1$ の間を行き来する単振動をしているが、

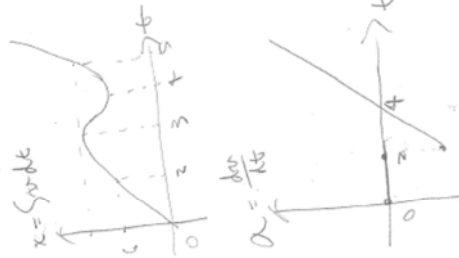
$$x = -1$$

微分・積分に関する発展的なテスト

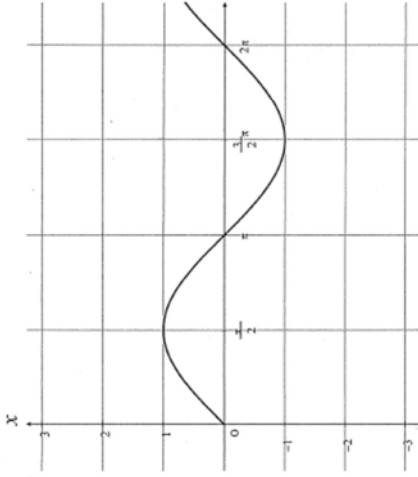
1 ある物体の $v-t$ グラフは以下のようなになっている。この物体はどのような動きをしているか、微分・積分の考えを用いて説明せよ。ただし、 $t=0$ において物体は $x=0$ にいるものとする。



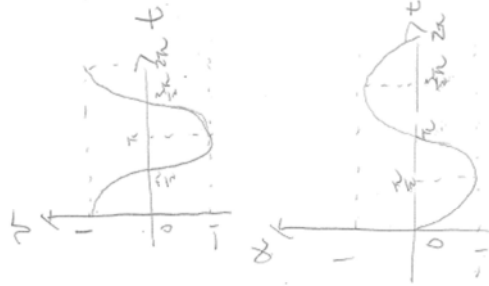
$t \leq 2$ におけるは、 $\frac{dv}{dt} > 0, v > 0, t < 2$
 正の向きに一定の速度で移動している
 $2 \leq t \leq 4$ におけるは、 $\frac{dv}{dt} = 0, v > 0, t < 4$
 正の向きに一定の速度で移動している
 $4 \leq t \leq 5$ におけるは、 $\frac{dv}{dt} < 0, v > 0, t < 5$
 正の向きに減速して移動している
 $5 \leq t \leq 6$ におけるは、 $\frac{dv}{dt} < 0, v < 0, t < 6$
 負の向きに減速して移動している
 $6 \leq t \leq 7$ におけるは、 $\frac{dv}{dt} = 0, v < 0, t < 7$
 負の向きに一定の速度で移動している
 $7 \leq t \leq 8$ におけるは、 $\frac{dv}{dt} > 0, v < 0, t < 8$
 負の向きに加速して移動している
 $8 \leq t \leq 10$ におけるは、 $\frac{dv}{dt} = 0, v = 0, t < 10$
 静止している
 $10 \leq t \leq 11$ におけるは、 $\frac{dv}{dt} = 0, v = 0, t < 11$
 静止している



2 ある物体の $x-t$ グラフは以下のようなになっている。この物体はどのような動きをしているか、速度の情報を与えて説明せよ。ただし、 $t=0$ における接線の傾きは 1 である。



$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
 $\frac{dx}{dt} > 0, \frac{d^2x}{dt^2} < 0, t < \frac{\pi}{2}$
 減速して正の向きに移動している
 $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$
 $\frac{dx}{dt} > 0, \frac{d^2x}{dt^2} > 0, t < \pi$
 正の向きに加速して移動している
 $\pi \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$
 $\frac{dx}{dt} < 0, \frac{d^2x}{dt^2} < 0, t < \frac{3\pi}{2}$
 負の向きに減速して移動している
 $\frac{3\pi}{2} \leq t \leq 2\pi$
 $\frac{dx}{dt} < 0, \frac{d^2x}{dt^2} > 0, t < 2\pi$
 負の向きに加速して移動している



したがって、この物体は
 一定の速度で移動している
 例として、バネが
 地震による揺れに比例して見られる
 (地震では、この物体は一定の速度で移動している。これは、バネの振動によるものである。)

(3) まとめ（研究の成果）と今後の課題

パフォーマンス課題を実施することで二つの成果が得られた。一つは、生徒が、日常生活における事象を他人に説明する際には、数学的な表現と言語的な表現の両方の面が必要であることを理解できたということである。もう一つは、教員が、各々の生徒が数学的な面と言語的な面のどちらでつまづいているのかを把握することができたということである。

一方、今後の課題としては次の二点が挙げられる。

一つは、パフォーマンス課題の難易度の調整が難しいということである。従来の考査問題とは異なる課題であり、なおかつ生徒の学力に適しているという二つの観点を同時に満足させることが難しかった。本事例ではルーブリックで定めた得点 20 点に、評価基準以外で評価できる記述に対して与えた点数を加えて合計得点とした。評価の結果は、全体で平均点が 5.2 点となり、生徒の平均的な学力より難易度の高いものとなってしまった。そのため、解答できずに評価し切れなかった生徒層も存在する。難易度の設定には工夫改善が必要である。

もう一つは、もし、パフォーマンス評価を学校や学年全体で実施すると想定した場合、他の教科担当者と評価基準を共有することが難しいということである。パフォーマンス課題を実施すると、本事例の加点部分や(2)評価事例カのようなルーブリックを超えた解答(資料 9)が出ると予想される。学年等で統一して実施するためには評価基準を共有しなければならないが、本事例のように 1 クラスのみでの実施でも、ルーブリックの変更や加点制度導入の必要性が生じ、予想以上に時間がかかってしまった。学校や学年全体の生徒にこの評価を生かしていくためには、この点の改善が必要である。

背理法の有用性と表現力の育成

1 学習活動の概要

(1) 科目・単元名

数学 I ・集合と命題

(2) 単元の目標

命題と証明について理解し、それらの有用性を認識するとともに、事象を数学的に考察し、活用できるようにする。

(3) 単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	知識・理解
<ul style="list-style-type: none"> 集合と命題に興味・関心をもち、問題解決に意欲的に取り組もうとする。 具体的な事象で論理に基づいた表現をしようとする。 対偶証明法や背理法などの証明方法を的確に利用しようとする。 	<ul style="list-style-type: none"> 集合に関する基本的な事項を理解し、いろいろな事象を論理的に考察し、分析・整理することができる。 数学の内容をより厳密に扱えるようになり、いろいろな事象や数学の概念を多面的・統合的に考察できる。 命題と証明についての数学的な見方や考え方を的確に活用できる。 	<ul style="list-style-type: none"> 集合の基本的な事項を図や表を使い表現し、的確に処理することができる。 命題の考え方をを用いて、事象を論理的に表現し、的確に処理することができる。 対偶証明法や背理法を的確に表現し、処理することができる。 	<ul style="list-style-type: none"> 集合と命題について理解し、基本的な知識を身に付けている。 対偶証明法や背理法について、論理・概念を理解し、知識を身に付けている。

(4) 取り上げる言語活動と教材（課題）

ア 言語活動

物事を論理的に考え、図や言葉などを工夫しながら表現し、他者に伝えること。

イ 教材（課題）

思考力・判断力・表現力を評価する問題として、ワークシート（資料 1，資料 2）を提示する。

(5) 単元の指導計画

集合	1 時間
命題と条件	1 時間
命題とその逆・裏・対偶	1 時間
命題と証明	2 時間（パフォーマンス課題は最後の時間に実施）

(6) ルーブリック（評価基準表）

	関心・意欲・態度	考え方	表現
	数学の論理や体系に関心をもち、積極的に活用しているか。	数学的に筋道立てた考え方をしているか。	考え方をきちんと説明・表現できているか。

A 3	与えられた問題に対して、関心をもち、意欲的に取り組んでいる。グループ内での話し合いにも積極性が感じられる。	問題を正しく読み取り、論理的に考察することができている。背理法の証明について理解しており、仮定から矛盾を示すという方針を理解している。全ての場合を書き出して検討することができる。	背理法における仮定から矛盾を示すところまで、しっかりした論理展開ができている。全ての場合を書き出して、論理的に正しいものに絞り込むことができる。
B 2	与えられた問題に関心をもつが、他人からの意見を聞くにとどまり、自らは積極的に活動していない。	背理法の仮定の部分は分かっているが、矛盾を示すことが理解できていない。または、矛盾を示すために何をすればよいのかが捉えられていない。書き出す場合には、条件を満たす状況の把握ができていない。	背理法の証明において、仮定から先の見通しが不十分であり、正しい論理展開ができていない、あるいは、最終的な答えまで辿り着けていない。全ての場合を書き出したものの中から絞り込みを行っているが、答えだけなど、記述としては不十分である。
C 1	興味・関心を示さず、問題に取り組もうとしない。グループ内での話し合いに参加していない。	問題を正しく読み取ることができない。背理法の考え方を理解していない。あるいは、論理的な思考に至っていない。	背理法の仮定を理解できていない。問題文に合うような状況を書き出しきれていない。

2 解説

(1) 指導事例と学習指導要領との関連

「学習指導要領 数学Ⅰ 3 内容と内容の取扱い」には、次のように示されている。

(1) ア (イ) 集合と命題に関する基本的な概念を理解し、それを事象の考察に活用すること。

本事例では、問題を解決するために論理的に考え、判断する力を養うこと、また、他者に理解してもらうために、読み手を意識して記述することや分かりやすく的確に説明することなど、表現力の育成にもつながることを目的の一つとしている。

(2) 言語活動の充実の工夫

○ 生徒の自力解決に基づき、根拠を明確にした説明を記述させるようにする。

まずは、自力で解決するための時間を確保し、各自の考えを自由に書かせる。その際、自己満足なものにならないように、結論に至った経緯が読み手に伝わるものであるかを意識して記述させる。

○ 生徒の誤答例を取り上げる。

問題を正しく読み取れていない場合や、論理的な思考がなされていない例があれば、それを取り上げて全体で共有する。

○ 話し合いの場を設け、意見交換をさせる。

3人～4人のグループで個々の考えを発表させ、考えを共有する。ヒントや新たな発想が生まれても、それぞれ自分の言葉で書かせ、読み手に伝わるような表現を工夫させる。また、ワークシートを使い、最終的には個人へフィードバックできるようにする。

○ これまでに学んできた分野との関連や有用性を感じさせ、議論につなげる。

背理法を用いて考えると簡潔に説明することができるが、個人やグループで十分考えさせる時間をとる。その上で、これまでに学習したものを使って考えることはできないか、また、問題文のどの部分がキーワードとなっているのかというヒントを出す。

3 実践報告

(1) パフォーマンス課題の実施状況

二つのクラスにおいて、50分授業の際に実施した。まずは問題①（資料1）について、個人で考えさせる時間を設けたが、半数ほどは手がかりがつかめずワークシートに何も書けないという状況であった。何か書けていたとしても、三人の配置図、赤・白などの言葉のみがほとんどであった。文章となっているものでも、根拠のない記述や文章を読み間違えているものばかりであった（例えば、瞳に映っている色を見た。目で合図をした。Cの色が分かるということは、AとBが赤でCが白。など）。この時点で背理法を使うことに気付き、ワークシートを埋められている生徒は一人もいなかった。

次に、一旦作業をやめさせ、誤答について触れた。合図などではなく、与えられた状況から問題解決ができるということなどを伝えた。また、問題文の中のキーワードはどこか、既習内容を使うとしたらどの分野なのかを考えながら論理展開をするよう促した。さらに、四人グループをつくり、その中で話し合いをさせた。誤答例やヒントを出したということもあったためか、どのグループも議論にはなっていた。

この時点においても、背理法を使うのではないかという意見は出ても、きちんと記述できている生徒はいなかった。そのため、問題①について背理法を使った模範解答を示し、問題②（資料2）のみを評価の対象とすることとした。問題①と同様に、まずは個人で考えさせ、次にグループで、最終的な考えは個人でという流れでワークシートを埋めながら進めさせた。問題①の解説の後ということもあり、背理法を使えばよいのではないかと考え、手を動かし始める生徒が多かった。

(2) 評価事例（具体的な評価物を載せながら）

別紙のようなワークシートと模範解答（資料1）から（資料2）を用意していたが、想像していた以上にさまざまな書き方があった。生徒の解答例（資料3）から（資料6）として、以下の四人の例を挙げる。

【解答例1】においては、最初に一人で考える段階から背理法の証明方法について理解できており、最終的な結論に至るまで論理的に的確に述べている（グループでの話し合いも、リーダーシップを発揮して活発な議論がなされていた）。

【解答例2】においては、背理法を理解し、最初の考えから最終的な考えまで、自分の言葉で整合性のある記述ができている。ただし、結論の部分は十分であるとは言えない（Aは赤であることまでは言えたが、三人とも赤であるということまでは言及できてはいない）。

【解答例3】においては、自分の意見はもっていなかったが、グループ内での話し合いから問題②も背理法を用いて論述できると分かり、最終的な考えを自分の言葉で述べている。背理法で矛盾を示すことは理解できているが、三人とも赤であるという結論の否定が間違っており、更に論理的な展開に至っていない。

【解答例4】においては、背理法を使うというところまでは理解できている。グループ内での話し合いでは、なぜ色が特定できるのかではなく、色が特定できる条件について考えようとしていた。方

向性としては間違っているが、議論は盛り上がっていた。また、最終的な考えでは、背理法の仮定はできているものの、矛盾を示すというところまでは理解できていない。

ルーブリック（評価基準表）により、下の表のような得点を付けた。

	関心・意欲・態度	考え方	表現	合計
解答例 1	3	3	3	9
解答例 2	3	3	2	8
解答例 3	2	2	1	5
解答例 4	3	1	2	6
全体の平均点	2.8	2.4	2.1	7.3

(3) まとめ（研究の成果）と今後の課題

以下は生徒の振り返りアンケート（感想のみ）を簡単にまとめた。

- ・ 結局、分かったような、分からなかったようなモヤモヤした感じです。
- ・ 頭は使ったけど、計算とかじゃない授業で楽しかった。
- ・ 相手に伝えて理解してもらおうということの大変さが分かった。グループの人に説明するだけで難しいので、書いたものを読んで分かってもらうのはもっと大変だと思う。
- ・ 背理法を勉強したときは実際何のためにあるのか分からなかったが、この問題を解いてみて役に立つことが分かった。
- ・ 授業があつという間で楽しかった。こういう授業をもっとやってほしい。
- ・ 背理法を勉強する前にやってもおもしろいと思う。

生徒の雰囲気としては、多くの生徒が楽しんで取り組んでいたように感じる。数学が得意な生徒が必ずしもできたわけではなく、ふだん数学を苦手とするような生徒も前向きに議論に参加していた。多くの教科書では「 $\sqrt{2}$ は無理数である」ことを証明するのに用いられる背理法であるが、それ自体を示して何の役に立つのかと考える生徒もいる。今回の取組においては、背理法を使うという方法を思いつかず、すべての場合の数を書き出してそれぞれ検討しようとする生徒の姿が見られたが、背理法の解説を聞いた時に「なるほど」と納得しうなずく姿が印象的であった。背理法の有用性を感じさせることで、授業で取り上げる内容が少しは身近なものになったのではないかと生徒の感想を見て感じた。日常にありがちな問題に対して、数学を使って解決できることを感じさせられれば、より数学を学ぶ意義を伝えられるのではないだろうか。今回は問題を与えて取り組ませたが、有用性について考えさせる手段の一つとして、背理法が使える場面について書かせてもよかったのではないかなと思う。

また、ふだんの生徒の学習を見ていると、答えを出すということに重点をおきがちである。すぐ解法パターンを覚えてそれに当てはめて答えを出そうとしたり、「この問題は、どの公式に代入したら解けますか」などと質問したりする生徒は少なくない。今回は、図や言葉を工夫して表現し他者に伝えるという取組をさせたが、予想以上にさまざまな記述が出た。自分の言葉で伝える工夫について、考えさせることができたと言える。数学は過程こそが大切で、それを伝える表現力を磨くことが重要だということを、少しでも実感させることができたと思う。題材を設定するのに苦労すると思われるが、今後の授業でも、数学の有用性を理解させ表現力を向上させられる取組を工夫していきたい。

資料1 模範解答1

【模範解答1】

【問題①】

A, B, C の3人の目の前には、赤い帽子2つと白い帽子3つがある。

3人に目をつぶらせ、いずれかの帽子を被らせた。

残った帽子を隠し、3人に目を開けさせた。

そして、

「あなたの帽子の色はわかりますか？」と順にたずねた。

すると、

A：「分かりません」

B：「分かりません」

C：「分かりました」と答えた。

Cが被っていた帽子は何色ですか。また、帽子の色を言い当てることができた理由はなぜですか。

読み手に伝わるように、図や言葉などを使って説明しなさい。

【その① まずは自分で考えてみよう】

【その② グループ内の意見やヒントで参考になったこと】

【その③ 最終的な考え】

Cが赤い帽子を被っていたと仮定する。

Aが分からなかったことから、Bは白い帽子を被っていることが決まる。

(もしBも赤なら、Aは自分は白だと答えるから。)

しかし、Bも分からないと答えることに矛盾する。

背理法により、Cの仮定が間違っていた。

つまり、Cは白い帽子を被っているということがいえる。

(1) 名前 ()

【模範解答2】

【問題②】

A, B, Cの3人の目の前には、赤い帽子3つと白い帽子3つがある。
 3人に目をつぶらせ、3人ともに赤い帽子を被らせた。
 残った帽子を隠し、3人に目開けさせた。
 そして、
 「この中に、少なくとも1人は赤い帽子を被った人がいる。
 自分が赤い帽子を被っていると思った人は、手を挙げて下さい」とたずねた。
 3人はしばらくの間お互いを見回した。同じ結論に達した3人は、同時に手を挙げた。
 3人はなぜ、自分が赤い帽子を被っていると気づいたのでしょうか。

読み手に伝わるように、図や言葉などを使って説明しなさい。

【その① まずは自分で考えてみよう】

【その② グループ内の意見やヒントで参考になったこと】

【その③ 最終的な考え】

Aが白い帽子を被っていたと仮定する。Aは次のように考えた。
 BにはAとCが見えている。Bは自分(B)の帽子が白だと考えているとすると、
 「少なくとも一人は赤である」ことから、
 Cはすぐに手を挙げるはずである。しかし、しばらく間があり、Cがすぐに手を挙げないことから、
 自分(B)は赤である、という判断ができるはずである。
 しかし、Bがしばらく手を挙げないことに矛盾する。
 背理法により、Aの仮定が間違っていた、つまり、自分(A)は赤い帽子を被っていると判断する。
 B, Cも同様に考え、同時に「自分は赤い帽子を被っている」という同じ結論に達した。

(1) 名前 ()

【解答例1】

【問題②】

A, B, Cの3人の目の前には、赤い帽子3つと白い帽子3つがある。

3人に目をつぶらせ、3人ともに赤い帽子を被らせた。

残った帽子を隠し、3人に目開けさせた。

そして、

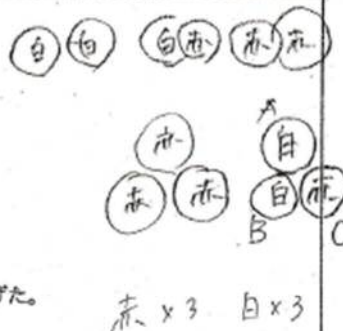
「この中に、少なくとも1人は赤い帽子を被った人がいる。

自分が赤い帽子を被っていると思った人は、手を挙げて下さい」

とたずねた。

3人はしばらくの間お互いを見回した。同じ結論に達した3人は、同時に手を挙げた。

3人はなぜ、自分が赤い帽子を被っていると気づいたのでしょうか。



読み手に伝わるように、図や言葉などを使って説明しなさい。

【その① まずは自分で考えてみよう】

- しばらくの間お互いを見回したということは誰かが手を上げるか上げないかの様子をわけていたということになる。
- 背理法で矛盾が生まれるということは誰かすぐに結論がでる人がいる。

【その② グループ内の意見やヒントで参考になったこと】

/

【その③ 最終的な考え】

- 背理法を使う Aは白色の中帽子であると仮定する。Bは白だとするとCは自分は赤であると答えられるはず。でもCはすぐに手を上げないのでBは自分が赤だとわかる。しかしBは分かったとすぐに答えなかったのが矛盾する。よってAは赤。BとCも同様に答え同じ結論に至ったもの。

(1) 名前 ()

【解答例2】

【問題②】

A, B, C の3人の目の前には、赤い帽子3つと白い帽子3つがある。

3人に目をつぶらせ、3人ともに赤い帽子を被らせた。

残った帽子を隠し、3人に目開けさせた。

そして、

「この中に、少なくとも1人は赤い帽子を被った人がある。

自分が赤い帽子を被っていると思った人は、手を挙げて下さい」

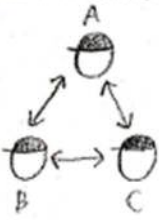
とたずねた。

3人はしばらくの間お互いを見回した。同じ結論に達した3人は、同時に手を挙げた。

3人はなぜ、自分が赤い帽子を被っていると感じたのでしょうか。

読み手に伝わるように、図や言葉などを使って説明しなさい。

【その① まずは自分で考えてみよう】



$\ominus \rightarrow \ominus \ominus$ 「少なくとも1人は赤い」に矛盾
 A B C
 $\ominus \rightarrow \ominus \ominus$ 「しばらくの間お互いを見回す」に矛盾
 $\ominus \rightarrow \ominus \ominus$ 「しばらくの間お互いを見回す」に矛盾

【その② グループ内の意見やヒントで参考になったこと】

本理法

【その③ 最終的な考え】

Aは白と仮定する。
 このとき、BとCが「白の場合、
 少なくとも1人は赤」ということに矛盾する。
 BとCが「白と赤だった場合、
 赤のほうはAともうひとりか」白とわかるため。
 自分が「赤だ」とすぐわかる。
 これはしばらくの間お互いを見回したことに矛盾する。

(1) 名前 ()

【解答例3】

【問題②】

A, B, Cの3人の目の前には、赤い帽子3つと白い帽子3つがある。

3人に目をつぶらせ、3人ともに赤い帽子を被らせた。

残った帽子を隠し、3人に目開けさせた。

そして、

「この中に、少なくとも1人は赤い帽子を被った人がいる。

自分が赤い帽子を被っていると思った人は、手を挙げて下さい」

とたずねた。

3人はしばらくの間お互いを見回した。同じ結論に達した3人は、同時に手を挙げた。

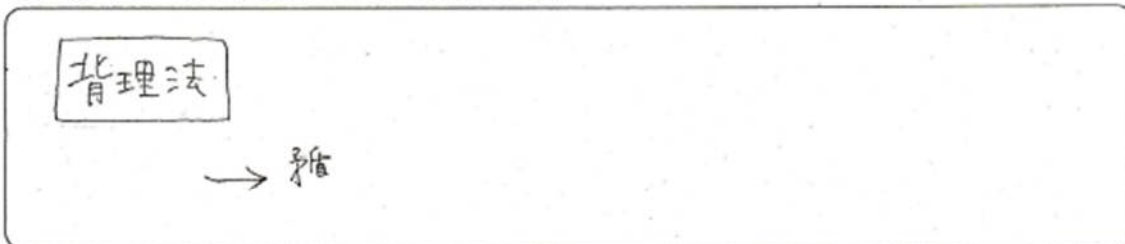
3人はなぜ、自分が赤い帽子を被っていると気づいたのでしょうか。

読み手に伝わるように、図や言葉などを使って説明しなさい。

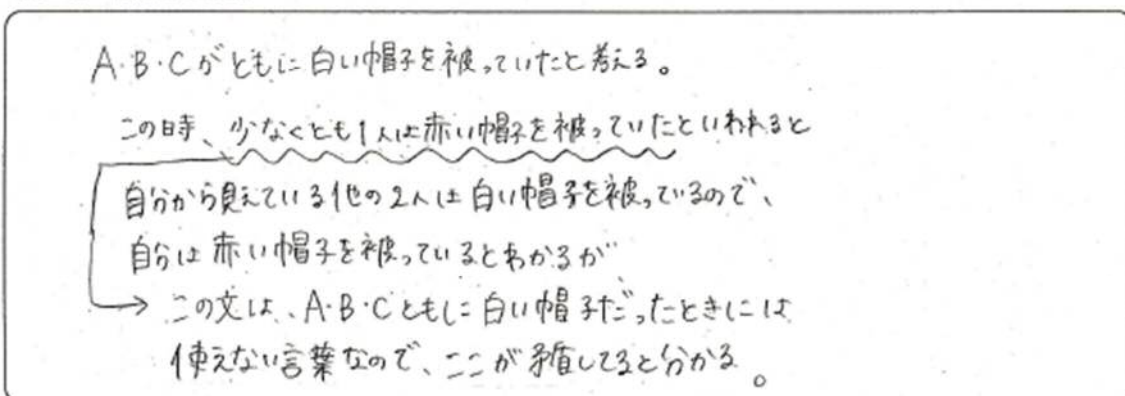
【その① まずは自分で考えてみよう】



【その② グループ内の意見やヒントで参考になったこと】



【その③ 最終的な考え】



(1) 名前 ()

【解答例4】

【問題②】

A, B, Cの3人の目の前には、赤い帽子3つと白い帽子3つがある。

3人に目をつぶらせ、3人ともに赤い帽子を被らせた。

残った帽子を隠し、3人に目開けさせた。

そして、

「この中に、少なくとも1人は赤い帽子を被った人がいる。

自分が赤い帽子を被っていると思った人は、手を挙げて下さい」とたずねた。

とたずねた。

3人はしばらくの間お互いを見回した。同じ結論に達した3人は、同時に手を挙げた。

3人はなぜ、自分が赤い帽子を被っていると気づいたのでしょうか。



読み手に伝わるように、図や言葉などを使って説明しなさい。

【その① まずは自分で考えてみよう】

Aは白と仮定する

Bから見るとCが赤なので自分が赤と特定できない。
 Cから見るとBが赤なので特定できない。
 Aから見てもBとCが赤なので特定できない。

$$\frac{1}{9} \quad \frac{8}{9}$$

【その② グループ内の意見やヒントで参考になったこと】

自分が赤と特定できる条件、

① 他の2人が白である

② 他の2人が赤である why?

【その③ 最終的な考え】

Aは白と仮定する

Bが白の場合: Cが(赤)

Cが白の場合 Bが(赤)

BとCが赤の場合

(1) 名前 ()

君ならデータをどう活用する？

1 学習活動の概要

(1) 科目・単元名

数学 I ・データの分析

(2) 単元の目標

統計の基本的な考えを理解するとともに、それをを用いてデータを整理・分析し傾向を把握できるようにする。

(3) 単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	知識・理解
データの分析における代表値の意味について考察しようとする。	代表値や表、図などを活用し、データを比較することができる。	代表値を求めたり、表や図を作成したりすることを身に付けている。	データの分析における用語の定義や意味を理解している。

(4) 取り上げる言語活動と教材（パフォーマンス課題）

ア 言語活動

自分がその生徒の先生だとしたら、その生徒に対し、どのような助言をするか、データを元に個人及びグループ内で考察し、その結果をまとめる。

イ 教材（パフォーマンス課題）

第1回、第2回のテストの得点と学習時間数に関するデータから、代表値を求め、表や図を作成する。それらを元に、その生徒に対する助言を考える。

(5) 単元の指導計画

- ・ 度数分布表、ヒストグラムや代表値などの意味について理解する。…2時間
- ・ 四分位偏差、分散、標準偏差などの意味について理解する。…2時間
- ・ 散布図や相関係数の意味について理解する。…2時間
- ・ 具体的な例を通して、既習事項を活用し、データを分析する。…2時間（本時 1/2～2/2）

(6) ルーブリック（評価基準表）

	関心・意欲・態度① 【個人】	関心・意欲・態度② 【グループ】	数学的な見方や考え方 【グループ】	数学的な技能 【個人】
	データの分析における代表値などを求めようとする。	データの分析における代表値の意味について考察しようとする。	代表値や表、図などを活用し、データを比較することができる。	代表値を求めたり、表や図を作成したりすることを身に付けている。
A	個人で表や図を書いたり、値を求めたりすることに意欲的に取り組んだ。（3点）	グループでの考察に積極的に取り組み、考察したことをしっかりまとめることができた。（4点）	どの素材を用いたのか、元にした適切な助言を考えた。（8点）	（レベル1）（レベル2）の素材をそれぞれ三つ以上求めることができた。（5点）

B		グループで考察したことをしっかりまとめることができた。(2点)	全体の中でのその生徒の位置や状況をつかみ、助言を考えることができた。(4点)	(レベル1)の素材を三つ以上求めることができた。(3点)
C	個人で表や図を書いたり、値を求めたりすることに十分に取り組みなかった。(0点)	グループでの活動に意欲的に参加せず、考察したことをまとめることもしなかった。(0点)	代表値や表、図などを活用し、データを比較して助言を考えることが十分にできなかった。(0点)	(レベル1)(レベル2)の素材をともに三つ以上求めることができなかった。(0点)

2 解説

(1) 指導事例と学習指導要領との関連

「高等学校学習指導要領」には次のように述べられている。

(4) データの分析

統計の基本的な考えを理解するとともに、それを用いてデータを整理・分析し傾向を把握できるようにする。

ア データの散らばり

四分位偏差、分散及び標準偏差などの意味について理解し、それらを用いてデータの傾向を把握し、説明すること。

イ データの相関

散布図や相関係数の意味を理解し、それらを用いて二つのデータの相関を把握し説明すること。

本指導事例で取り上げる課題は、ただ個人で図や表を書いたり、値を求めたりするだけでなく、それらを用いてデータの傾向や相関を把握し、説明することに重点をおいて評価する。

(2) 言語活動の充実の工夫

【個人で取り組む課題】

データについて、まず個人で度数分布表、ヒストグラム、代表値、分散、標準偏差、散布図等、データの分析に必要な素材をワークシートに書き込ませる。

【グループで取り組む課題】

4人のグループをつくり、グループ内で、個人で書いた素材について互いに情報を共有する。グループのメンバーから集めた素材を用いて、生徒に対する助言を考察する。その際、誰に対して、どの素材を判断の根拠とし、どんな助言を考えたかを必ずはっきりさせるように注意する。

3 実践報告

(1) パフォーマンス課題の実施状況

1年生2クラス(70名)で実施した。まず事前準備として、4名ごとのグループと座席表を作成し提示した。グループを作成する際には、各グループに成績上位の生徒を1名、成績下位の生徒を1名、成績中位の生徒を2名含むようにすること、また男女のバランスを考え同性が一人にならないようにすることに留意した。

授業の始めにワークシートを配り、5分程度で本時の授業の内容とルールについて説明した。また、どのような点を評価するかということも口頭で伝えた。

その後、グループ内で相談をして、誰がどのデータについて素材を作成するか、各自の役割を決めさせ、個人での分析作業を開始した。ここでの活動は【関心・意欲・態度①】、【数学的な技能】の評価となる。より多くの素材を求めるよう、(レベル1)の素材だけでなく(レベル2)の素材も求めるように指示した。また、求めた素材は必ずワークシートに書き込むように指示した。個人での活動時間は40分程度で、ほとんどの生徒が落ち着いて真面目に取り組んだ。



資料1 グループ活動の様子

個人での活動後、グループで各自のデータを持ち寄り、どの生徒に対しての助言を考えるか、グループ内で話し合って決めさせ、その生徒に対しての助言を考える活動を開始した。ここでの活動は【関心・意欲・態度②】、【数学的な見方や考え方】の評価となる。「あなたが今から助言をする人は、自分のテストの得点と学習時間数しか知りません。したがって、自分が全体の中でどの位置にいるのかは全く分かっていません。どの素材を用いて、どのように説明するのかを明確にし、その人にとって適切な助言になるように考えましょう」と改めて説明をし、グループで考察したことを必ず各自のワークシートに書き込むように指示した。グループでの活動時間は40分程度であったが、議論が活発に行われているグループとそうでないグループがあった。また、クラスによってもグループ活動の盛り上がり方に差を感じた(資料1)。

グループでの活動後、アンケートを実施し、活動を振り返る時間を設けた。

(2) 評価事例

ルーブリック(評価基準表)の作成の際に留意したことは、今回の授業においては、【数学的な技能】よりも【関心・意欲・態度】と【数学的な見方や考え方】に重点を置くということである。そのため、合計20点満点中7点を【関心・意欲・態度①②】、8点を【数学的な見方や考え方】とした。また、【関心・意欲・態度①】、【数学的な技能】は個人での活動の評価、【関心・意欲・態度②】、【数学的な見方や考え方】はグループでの活動の評価というように、どの場面においてどの観点で評価するかということを確認にした。授業中の観察においてたくさんの評価をするのは難しいだろうと考え、授業中の観察においては【関心・意欲・態度②】のみを評価することにし、それ以外は提出されたワークシートにおいて評価することとした。

【関心・意欲・態度①】の評価については、ほとんどの生徒が落ち着いて真面目に個人での活動に取り組んでおり、あまり差がつかなかったが(資料2)、【数学的な技能】については、能力差もあり評価が分かれた(資料3)。つまり、ほとんどの生徒は代表値などを求めようとする意欲はあったが、求め方が間違っていたり、計算ミスをしたりで正確に答えを導き出せていない生徒がいたということである。

資料2 関心・意欲・態度①の評価

関心・意欲・態度①	
A (3点)	97.1% (68名)
B	
C (0点)	2.9% (0名)

資料3 数学的な技能の評価

数学的な技能	
A (5点)	44.0% (28名)
B (3点)	44.3% (31名)
C (0点)	15.7% (11名)

【関心・意欲・態度②】はグループ活動中のグループ内での生徒の様子を観察し、積極的にグループ活動に取り組んでいる生徒を記録し、評価した（資料4）。

ループリックの中で、実際に評価をする際に一番困ったのが【数学的な見方や考え方】である。どの程度の記述がされていれば8点または4点とするか、その境目が曖昧で、判断が難しかった（資料5）。ループリックの記述にある「適切な助言」とは何か、「全体の中でのその生徒の位置や状況をつかみ」という記述にある「つかみ」というのは、どのようなことが書かれていればつかんだことになるのかなど、明確にしておく必要があった。

資料4 関心・意欲・態度②の評価

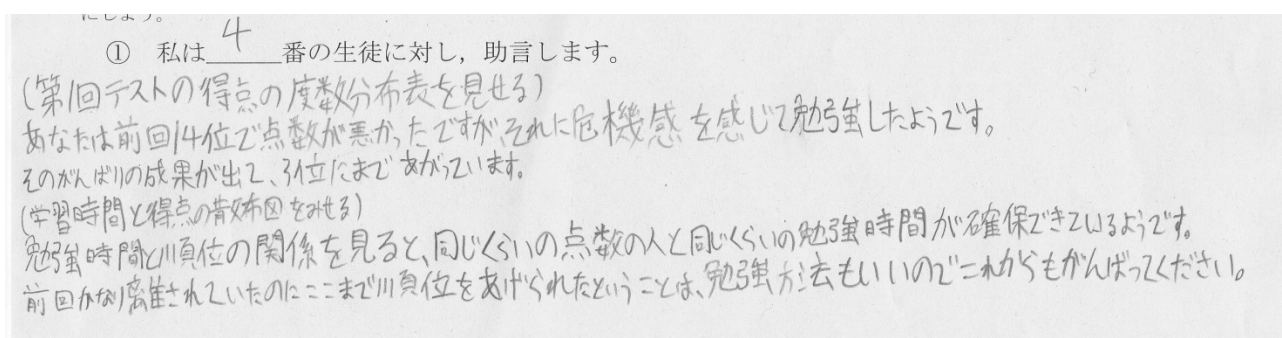
関心・意欲・態度②	
A (4点)	85.7% (60名)
B (2点)	11.4% (8名)
C (0点)	2.9% (2名)

資料5 数学的な見方や考え方の評価

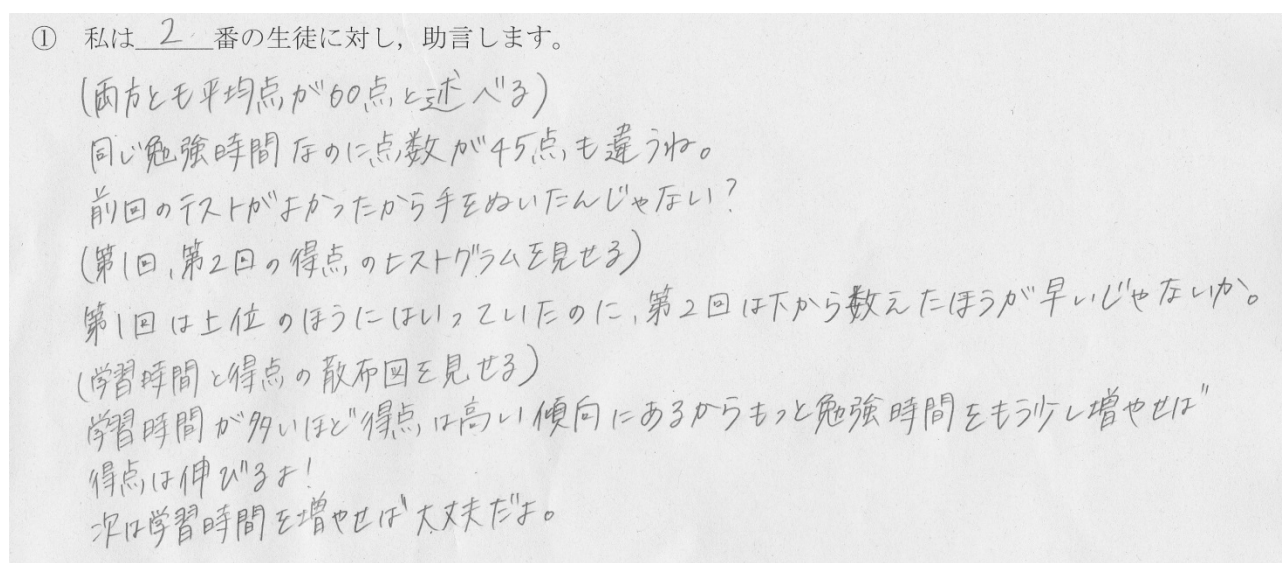
数学的な見方や考え方	
A (8点)	22.9% (16名)
B (4点)	72.9% (51名)
C (0点)	4.3% (3名)

ここでは【数学的な見方や考え方】でA（8点）をつけた事例を三つ挙げる。

[4番に対する助言]



[2番に対する助言]



[15 番に対する助言]

① 私は 15 番の生徒に対し、助言します。
 (学習時間のヒストグラムを見せる)
 学習時間は足りている。点数は20点下がってしまったけど、
 第一回、第二回ともに、2位で悪くないので大丈夫です。
 一つ言うなら、1時間でも2時間でも勉強時間を増やせば
 一位を取れると思います。
 なせなら勉強時間と得点の散布図を見ると、1位の人と勉強時間に
 差があるのに、点数にあまり差がないから、君は能力が高いと思います。
 散布図を見ても、勉強時間が長いほど、点数が高いので、一位が
 取れるよ、もう少しがんばってください。

上に挙げた三つの例については、書かれている文章の中で、分析したものに基づく記述ではない文章も見られる(「勉強方法もいいので」「勉強時間を増やせばもう少し増やせば得点は伸びる」「君は能力が高い」など)が、その他の記述について、評価できる記述があるので、A(8点)をつけた。この評価を生徒に伝えるときには、不十分な点についてのアドバイスをする必要がある。

その他のワークシートについては、どの素材を用いてそれを説明するのかを明確にするように繰り返し伝えたのだが、「学習時間が少ないから点数が悪い」「平均は…」「順位は…」といった程度の内容が多かった。アンケートでも「素材は作れたが、上手く活用することができなかった」という回答が複数あったが、多くの生徒は図や表を書いたり、値を求めたりすることはできても、それらを用いてデータの傾向や相関を把握し、説明するという力は付いていなかったと感じた。我々教員がふだん生徒と面談をする際にも、「学習時間を増やさないで…」「平均点と比べて…」「順位は…」という話し方をしていることも影響しているのかもしれない。定期考査の得点が高い生徒の一部はこちらが要求していることをくみ取ることができ、テストの得点と学習時間数の相関関係を散布図で示したり、箱ひげ図や分散を用いて二つのテストの違いを分析したりする等、詳細な記述をすることができていた。

また、評価結果の合計得点を(資料6)に示した。平均点は14.6点で、20点満点の者は7名いた。この7名に共通することは、定期考査でも高得点をとっていることである。しかし、定期考査で高得点をとっている者がすべて、今回のパフォーマンス課題で高得点がとれているかという、必ずしもそうではないということが分かった。

資料6 得点の分布

合計得点 (20点満点)	割合 (合計70名)
20点	10.0% (7名)
19点	0% (0名)
18点	7.1% (5名)
17点	0% (0名)
16点	28.6% (20名)
15点	1.4% (1名)
14点	27.1% (19名)
13点	0% (0名)
12点	7.1% (5名)
11点	10.0% (7名)
10点	5.7% (4名)
9点	1.4% (1名)
8点	1.4% (1名)
7点以下	0% (0名)
平均点	14.6点

(3) まとめ（研究の成果）と今後の課題

授業の最後に実施したアンケートの結果は次の（資料7）ようになった。

資料7 アンケート結果

問1 あなたは個人で素材を作ることができましたか？			
たくさん作ることができた	まあまあ作ることができた	ほとんど作ることができなかった	まったく作ることができなかった
15.7% (11名)	78.6% (55名)	5.7% (4名)	0% (0名)
問2 あなたの作った素材はグループでの話し合いに役立ちましたか？			
大いに役に立った	少し役に立った	ほとんど役に立たなかった	まったく役に立たなかった
5.7% (4名)	65.7% (46名)	22.9% (16名)	5.7% (4名)
問3 あなた自身はグループでの話し合いにどの程度参加しましたか？			
積極的に参加した	やや参加した	ほとんど参加しなかった	まったく参加しなかった
35.7% (25名)	52.9% (37名)	10.0% (7名)	1.4% (1名)
問4 あなたのグループは協力して、意見を出し合いながら活動することができましたか？			
すべての人が協力的で活発に話し合うことができた	ほとんどの人が協力的に話し合うことができた	一人の意見で話が進んでいた	まったく話し合いが進まなかった
31.4% (22名)	52.9% (37名)	8.6% (6名)	7.1% (5名)
問5 今回実施した個人活動&グループ活動についての感想（自由記述）			
<ul style="list-style-type: none"> ・ 個人では気付かないところをグループで補うことができた。いろいろな視点でデータを見ることができた。（複数） ・ ふだんあまり話したことの無い人と会話できたのがよかった。（複数） ・ 楽しかった、面白かった。（複数） ・ 分担して活動したので、短時間で多くの情報を得ることができた。 ・ 自分の作った素材も役に立ってうれしかった。 ・ 図を描いて見せたりすることで、分かりやすくなった。 ・ 習った素材を使うと根拠がはっきりして伝わりやすかったと思った。 ・ 他の人がまとめた素材を見ると、新しい発見があったり、きれいにまとめる方法が分かったりしてよかった。 ・ 先生って大変だなと思った。 ・ 素材は作れたが、上手く活用することができなかった。（複数） ・ まず話し合いの仕方や意見の伝え方を学ぶことが大切だと思う。自分も含めて、今の時点で話し合いができるほどの力は備わっていないと思う。 ・ グループ活動だと、グループの人に頼ってしまった。 ・ もう少し時間がほしかった。 			

グループ学習を実施した目的・理由の一つは「他者の意見を聞くことで、自分一人では気付かないことに気付くことができる」ということである。それについては、感想の自由記述にも「いろいろな視点でデータを見ることができた」と複数書かれており、十分満足できる結果であったと思う。男女比を考慮したグループ編成にしたのも「ふだんあまり話したことの無い人と会話できたのがよかった」と複数書かれており、よかったのではないかと思われる。しかし、「まず話し合いの仕方や意見の伝え方を学ぶことが大切だと思う。自分も含めて、今の時点で話し合いができるほどの力は備わっていないと思う」という感想もあった。問3や問4で否定的な回答が見られたのも、グループ学習の進め方についての指導不足の表れと言えるかもしれない。

今回の研究を実施するに当たって、まずパフォーマンス課題の作成に悩んだ。定期考査のような【知識・理解】や【数学的な技能】に対する評価が中心となるペーパーテストの作成には我々教員は慣れているが、生徒の【関心・意欲・態度】や【数学的な見方や考え方】を評価するには、どのような課題を作ればよいかということに我々教員は慣れていない。今学習している単元の中で生徒が興味・関心をもちやすい設定にしたい、せっきくの機会なのでふだん行っていないグループ学習も取り入れてみたいと思い、テストの得点と学習時間数という生徒にとってなじみのあるデータから、自分がその生徒の先生だとしたらどのように助言をするか、という課題設定を考えたのだが、課題設定を決めた後も、どのような数値のデータにすれば、限られた授業時間内で分析することができ、多様な見方や考え方が生まれ、生徒の議論がより深まるだろうかと頭を悩ませた。データの大きさを幾つにするか、テストの得点や学習時間の平均や分散を幾つにするか、テストの得点と学習時間数の相関係数は幾つにするか等、考えるべきことが多く、結局結論が出ないままに見切り発車した。一つの答えを求める問題ではなく、議論を深めることができる課題作成についてもっと教材研究をする必要性を感じた。

ルーブリック（評価基準表）の作成については、どのようなルーブリックであれば評価がしやすいかを考えて作成したつもりだったが、前述したように【数学的な見方や考え方】の評価は判断に迷うところがあった。学年の全クラスを複数の教員で評価をするということになると、もう少し具体的にルーブリックを設定する必要があるだろう。しかし、今回のような一つの答えに決まらない自由記述のパフォーマンス課題に対して、はっきりとしたルーブリックを作成するのは難しい。もし、もう一度この「データの分析」でパフォーマンス課題を実施するのであれば、学習時間数は省き、第1回テストと第2回テストの得点のデータだけにして、それぞれのデータの特徴、違い、相関等を調べさせる課題にし、教員側があらかじめ生徒の解答を予想しやすいような簡略化した課題設定にしたい。

また、生徒の「話す力」「聞く力」「書く力」「表現する力」を伸ばす指導を日頃からしていかなければ、充実した言語活動は期待できないだろう。これには、教員側、生徒側ともに経験が必要である。失敗を恐れず、積極的に実施する姿勢をもちたい。

【参考資料】

データの分析（君ならデータをどう活用する？） No. 1

1年____組____番 氏名_____

【本時のルール】

① この授業には、個人で考える時間とグループで考える時間があります。個人で考える時間は私語をせず、個人でじっくり考えること。たくさん素材を作った人を評価します。あなたが個人で考えた資料が、グループのためになります。

グループで考える時間は積極的に発言をしたり、グループの意見をまとめたりすること。関心・意欲・態度も評価します。

つまり、メリハリをつけてがんばりましょう！

② 教科書、ノート、プリントを見てもよいこととします。また、必要ならば電卓を用いてもかまいません。

	生徒番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
第1回 テスト	①得点	75	85	20	25	80	60	85	40	65	100	50	40	35	45	95
	②学習時間	16	6	6	4	16	12	12	12	14	20	8	8	4	10	16
第2回 テスト	③得点	60	40	45	70	50	60	65	55	60	80	70	65	50	55	75
	④学習時間	10	6	12	14	8	12	12	10	8	20	14	18	14	10	16

問題

あなたは先生です。表は、あなたが教えている生徒 15 人の第 1 回テスト、第 2 回テストの得点と学習時間数を表しています。今日は、あなたが先生として、これらのデータを分析し、生徒に対して適切な助言をしてもらいたいと思います。

(1) 《個人》 まず、これらのデータを分析するための素材を個人で作成しましょう。

【キーワード】(レベル1) 度数分布表, ヒストグラム, 平均値, 最頻値, 中央値, 範囲,

(レベル2) 四分位数, 四分位範囲, 四分位偏差, 箱ひげ図, 分散, 標準偏差, 散布図, 相関係数

私は_____について分析します。

【参考資料】

データの分析（君ならデータをどう活用する？） No. 2

1年____組____番 氏名_____

(2) 《グループ》 素材を用いて、何番の子にどんな助言をしたらよいかをグループで考えよう。
その際、どの素材を用いたかを明確にしよう。

① 私は_____番の生徒に対し、助言します。

② 私は_____番の生徒に対し、助言します。

三角形の面積の考察を通して、一つの事象を多面的に捉える能力を育む事例

1 学習活動の概要

(1) 科目・単元名

数学 I ・ 三角形の面積

(2) 単元の目標

三角形の面積の公式の特徴について理解し、事象の考察に活用できるようにする。

(3) 単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	知識・理解
三角形の面積の公式を導くにあたり、さまざまな数学の公式や定理を活用しようとしている。導いた公式を条件に合わせて使い分けようとしている。	一つの公式の意味を理解し、さまざまな角度から捉えることができる。	三角形の辺や角に関するさまざまな公式を利用して、多くの三角形の面積の公式を導くことができる。 文字を含む複雑な計算を行うことができる。	面積の公式がもつ特徴を押さえ、状況に応じて公式を使い分け、問題を効率よく解くことができる。

(4) 取り上げる言語活動と教材

ア 言語活動

- ・ グループ活動を取り入れることにより、コミュニケーション能力を高める。
- ・ 式、図などを用いることで、自分の考えを他者に分かりやすく表現する。

イ 教材（パフォーマンス課題）

- ・ 初等教育で既習の三角形の面積公式（底辺×高さ÷2）を基にして、三角比の定義、三角形の相似比の関係などを用いて多くの公式を導く。
- ・ 導いた公式の特徴を捉え、条件により効率のよい方法で三角形の面積を求める。

以上の内容のパフォーマンス課題（資料1）をワークシートで与えて取り組ませる。

資料1 パフォーマンス課題

- ① 小学校で学習した（三角形の面積 S ）＝（底辺）×（高さ）÷2を変形して、次の三角形の面積の公式を導きなさい。但し、図（資料14）のように各頂点A、B、Cの対辺の長さをa、b、cとし、また、 $\angle ABC=B$ 、 $\angle BCA=C$ 、 $\angle CAB=A$ とする。

$$\text{【公式】 } S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin A$$

- ② 小学校で学習した（三角形の面積 S ）＝（底辺）×（高さ）÷2を利用して、次の三角形の面積の公式を導きなさい。但し、図（資料14）のように各頂点A、B、Cの対辺の長さをa、b、cとし、また、 $\angle ABC=B$ 、 $\angle BCA=C$ 、 $\angle CAB=A$ 、内接円の半径をrとする。

$$\text{【公式】 } S = \frac{1}{2} r(a+b+c)$$

- ③ 小学校で学習した（三角形の面積 S ）＝（底辺）×（高さ）÷2を利用して、【ヒント】の手順に従って次の三角形の面積の公式を導きなさい。但し、図（資料14）のように各頂点A、B、Cの対辺の長さをa、b、cとし、また、 $\angle ABC=B$ 、 $\angle BCA=C$ 、 $\angle CAB=A$ 、外接円の半径をRとする。

【公式】 $S = \frac{abc}{4R}$

- 【ヒント】 1 2点B, Cを頂点の一部とし, 一辺を外接円の直径とする $\triangle BCD$ を考える。
 2 点Cから辺ABに垂線を下ろす。
 3 三角形の相似を利用する。

- ④ 小学校で学習した(三角形の面積 S) = (底辺) × (高さ) ÷ 2を利用して, 次の三角形の面積の公式を導くように空欄をうめなさい。但し, 図(資料14)のように各頂点A, B, Cの対辺の長さをa, b, cとし, また, $\angle ABC = B$, $\angle BCA = C$, $\angle CAB = A$ とする。

【公式】 $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 但し, $2s = a + b + c$

- ⑤ ①～④で求めた公式の特徴を文章で述べなさい。
 ⑥ ①～④で導いた公式を利用し, できるだけ効率よく問題を解きなさい。

【問題】 図(資料14)のように半径Rの円に内接する面積 $2\sqrt{14}$ の $\triangle ABC$ があり, $AB = 3$, $BC = 5$ である。以下の問に答えよ。

- (1) $\sin B$ の値を求めよ。
 (2) ACの長さを求めよ。
 (3) $\triangle ABC$ の内接円の半径rを求めよ。
 (4) $\triangle ABC$ の外接円の半径Rを求めよ。
 (5) 図のように弧ACのBを含まない弧上に $AD = CD$ となるように点Dをとる。

$\triangle ADC$ の面積が $4\sqrt{14}$ のとき, ADの長さを求めよ。

(5) 単元の指導計画 (全4時間)

	学習活動	言語活動に関する指導上の留意点
第1次 (2)	・三角比の応用として, 正弦定理や余弦定理の公式を確認し, 平面図形や空間図形の計量をする。	・公式を暗記するだけではなく, どのように導き出されたのかを図を用いて丁寧に説明し, 理解させた上で証明する際の文章の留意点について説明する。
第2次 (2)	・三角形の面積の基本公式を確認し, それを基にして他の公式を導きだし, それぞれの公式の特徴を押さえる。(本時は1/2及び2/2)	・グループ学習を通して, 他の生徒の考えを理解し, 自分の考えを的確に伝える表現力を身に付けさせる。

(6) ルーブリック (評価基準表)

生徒のパフォーマンス課題への取り組みを, ワークシートを使い以下の課題別ルーブリック(資料2～4)を基に評価した。

資料2 ①～④のルーブリック

	考え方	処理	表現
	数学的に筋道を立てた考え方をしているか。	解法の手続きを正しく実行できているか。	考え方をきちんと説明・表現できているか。
A 5	導き出す公式に向けて, 必要とされる公式や定理を適切な場面で使用している。	文字を含む複雑な計算も確実にこなし, 公式を導き出している。	状況に合わせて, 図や記号, 数式などを的確に使用し, 論理的な文章となっている。

B 3	公式や定理を利用しようとする意図は見られるものの、的確な場面で使用されていない。	方向性は正しいものの、計算を正しく行うことができず、正解には至らない。	図や数式などを利用しているが、説明等がなく、読み手が解答者の意図を考えながら読まなくてはならない。
C 1	的外れな公式や定理を使用している。	計算に至る前に、解答の方向性も見いだせずに終わってしまっている。	公式のみが羅列されている。計算の表記が断片的である。
D 0	白紙で解答に至っていない。		

資料3 ⑤のルーブリック

	関心・意欲・態度	考え方	表現
	数学の理論や体系に関心を持ち、積極的に活用しているか。	公式を多面的に捉えているか。	考え方をきちんと説明・表現できているか。
A 3	一つの解答だけではなく、さまざまな考え方をしようとした痕跡が見られる。	公式の特徴をさまざまな角度から捉えている。	文脈が通り、読み手が理解しやすい文章である。
B 1	単純な考察しかできず、深い考えには至っていない。	公式の特徴を正しく捉えることはできているが、さまざまな角度からは捉えられていない。	表現したいことは理解できるが、読み手が解答者の意図を考えながら読まなくてはならない。
C 0	白紙で解答に至っていない。		

資料4 ⑥のルーブリック

	考え方	処理
	数学的に筋道を立てた考え方をしているか。	解法の手続きを正しく実行できているか。
A 3	適切な公式を使用し、効率のよい解答になっている。	計算ミスなく、正しい解答となっている。
B 1	公式を利用して解答を出そうとしているが、効率のよい解答であるとは言えない。	計算ミスが生じてしまい、間違った解答となっている。
C 0	白紙で解答に至っていない。	

2 解説

(1) 指導事例と学習指導要領との関連

「学習指導要領第2章第4節数学第3款の3」には、次のように示されている。

3 指導に当たっては、各科目の特質に応じ数学活動を重視し、数学を学習する意義などを実感できるようにするとともに、次の事項に配慮するものとする。

(1) 自ら課題を見だし、解決するための構想を立て、考察・処理し、その過程を振り返って得られた結果の意義を考えたり、それを発展させたりすること。

本事例では、三角形の面積の公式を導くだけではなく、それぞれの公式の特徴を捉えることにより、得られた結果の意義を考えることにつながり、またその際にグループ学習を行うことでコミュニケーション能力を高めることにもつながると考える。

(2) 言語活動の充実の工夫

ア コミュニケーション能力を高め、個の理解力へつなげる活動

基となる公式を、どのような公式や定理を用いて、次の公式へと導けばよいのかを各自で考える。その上で、3～4人でグループをつくり、お互いの考えを理解し合うことで、各自の考えをより論理的にまとめることへとつなげる。

イ ワークシートにまとめる活動

自分の考えをまとめた上で、それを数式や図などを活用して分かりやすい解説を心がける。また、その公式の特徴を捉えることにより、どのような条件において効果的な活用が可能な公式であるかということを再確認するとともに、幅広い視野をもって問題に取り組む姿勢を育むことができる。

3 実践報告

(1) パフォーマンス課題の実施状況

ア パフォーマンス課題実施までの流れ

本校生徒は数学に苦手意識をもっている者が多く、数学の公式などは導き出された背景や意味などは理解せず、ただ公式を丸暗記し数値を代入して解答に至る者がほとんどである。そのためか基本問題に対してはある一定程度まで正解を導き出すことができるが、応用問題となると全くと言っていいほど解答できないのが現状である。また記述式の解答においては、数式を羅列し説明文を書かない解答や、計算用紙に書いたメモのような解答も見受けられる。

そこで今回のパフォーマンス課題を実施するに当たり、論述の基礎力を身に付けることができ、また応用力を養成することができる題材を取り上げるよう配慮した。

イ 実施対象生徒及び授業

3年生の2学期の授業で、理系生徒13名を対象として実施した。

ウ 授業内容

授業は数学I及び数学Aの復習として、三角比の応用で実施することとした。パフォーマンス課題を実施する前に、正弦定理や余弦定理の証明及び三角形に関するさまざまな定理の意味や条件を確認した。特に証明においては論述の大切さを生徒に理解させるよう意識して丁寧に実施した。また、解答の方向性についてもできるだけ細かく解説し、その後実施するパフォーマンス課題に取り組みやすいよう配慮した。

上記の授業を2時間実施した後、次の1時間は三角形の面積の公式①～④を導くワークシート(資料14)に取り組みさせた。授業の前半20分は各自で解答に取り組みさせ、その後3～4人で1グループとなり、各自で考えた解答や考え方などを発表し合い、各グループで最もよいと思われる解答を作成できるよう討論を繰り返した。その授業の最後の15分は、再度個人でワークシートの完成へ向けての時間とした。



グループ学習風景

次の1時間は、前時の解説を行った上で、それぞれの公式がもつ特徴についてのワークシートに各自で取り組んだ。またその後導いた公式を利用し、⑥の問題に取り組んだ。その後アンケート（資料15）を実施し、意識の変化を調査した。

エ パフォーマンス課題の実践例

(ア) ①～④に関するパフォーマンス課題

公式を導く課題については、解答の方向性が比較的分かりやすいと思われる①、②の課題については、生徒の多くが各自で正解を導き出していた。また、そうでない生徒においてもグループワークの中で理解することができ、ワークシートに正答を書き込むことができた。しかし、③、④の課題に関しては自力で正解に至る者はほとんどおらず、ワークシートに空欄が目立った。しかし、グループ学習で活発な議論を交わす中で、方向性を見つけ出しそれぞれのグループで正解を導き出していった。また、自発的に出来上がった答案を互いに確認しあう場面も見受けられ、グループ学習の予期せぬ効果が得られた。

(イ) ⑤、⑥に関するパフォーマンス課題

⑤、⑥の課題については各自で取り組むこととしたが、前時の授業で公式の理解度が増したためか、多くの生徒が積極的に課題に取り組んでいた。

⑤の課題では、面積を求めるときの条件として特徴を捉えるだけでなく、②の公式を「内接円の半径を求めるときに使用する」といったように、通常とは異なる視点から公式の特徴を捉えた解答も見受けられた。「幅広い視野をもって問題に取り組む姿勢を育む」という目標を達成できた手ごたえを感じた。

⑥の課題においては、今までであれば正弦定理や余弦定理、三角形の相互関係などを用いて計算に多くの時間を費やしていた生徒も、四つの公式をうまく活用して効率よく解答していた。

(2) 評価事例

生徒が取り組んだワークシートの評価としては、前述したルーブリック（評価基準表）に基づき評価を行った。

ア ①～④のワークシートに関する評価

①～④のワークシートに関する評価をルーブリックに掲げたそれぞれの観点から、同一内容で評価しようとしたが、以下の二つの問題が生じることとなった。

一つ目の問題は、①～④に関する評価において[各自で考えた解答]と[グループで考えた解答]のどちらを評価するかということである。グループ学習以前に正答を導いた生徒もいれば、グループ学習

で理解度を高めた結果、正答に至った生徒もいる。それらの評価をどのように得点差をつけて、採点するのかということが問題となったのである。

生徒個人の能力を評価すべきであることは当然であるが、グループ学習で行われた通常での授業では見ることができない生徒の数学に対する関心、意欲、積極性なども評価したいと考え、[各自で考えた解答]と[グループで考えた解答]のそれぞれにおいて採点し、合計得点で評価を行うものとした。この結果、より正確な評価を行うことができたが、全体の得点に対する①～④の課題の得点割合が47.6%から64.5%と高くなってしまい、他の課題での評価得点と差が開いてしまったことは反省としてあげられる。

また④の課題の評価において、①～③と同様のルーブリックでは評価が十分に行えないということが問題として浮上した。④のワークシートは、当初は①～③のワークシート同様、自由記述式のワークシートを予定していたが、内容的に本校生徒にとっては難しいと判断し、穴埋め形式のワークシートに急きょ変更した。したがって、①～③のルーブリックでは十分な評価を行うことができなかった。そこで、以下のようなルーブリック（資料5）に変更をして評価を行った。

資料5 ④のルーブリック改訂版

知識・理解		数学的な技能			
	三平方の定理を理解しているか。	文字を含む整式の式変形を正しく行うことができているか。			
A 3	三平方の定理を理解し、二つの三角形とともに正しく立式することができた。	A 6	①、②から $4c^2y^2$ の式をつくり、因数分解することができた。	A 6	$2s = a + b + c$ と置き換えることで、ヘロンの公式を正しく導くことができた。
B 1	一つの三角形で三平方の定理を用いて、立式することができた。	B 3	①、②から $4c^2y^2$ の式を作ることにはできたが、因数分解には至っていない。	B 3	$2s = a + b + c$ と置き換えることはできているが、解答にいたる途中の計算ミス等で、ヘロンの公式の形には至らなかった。
C 0	白紙で解答に至っていない。	C 0	白紙で解答に至っていない。	C 0	白紙で解答に至っていない。

上記のルーブリックを使用することで明確な採点が可能となり、生徒の取り組みに対する評価を正しく行うことができたと考える。

イ ⑤のワークシートに関する評価

この設問に関しては、特に問題なくルーブリックの基準をもとに正しく評価することができた。

ウ ⑥のワークシートに関する評価

この設問に関しては、「考え方」「処理」の2観点についてルーブリックを作成し評価を行ったが、「表現」という観点についても加えておくべきであったと反省している。グループ学習などを通して、コミュニケーション能力を高めることを目的とし、効果が得られたように感じたが、数学の解答となると以前同様、以下の解答（資料6）のように数式の羅列のみの解答が目立った。

資料6 ⑥のワークシート解答例

(1) $2\sqrt{14} = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \sin B \therefore \sin B = \frac{4}{15}\sqrt{14}$

(2) $AC^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos B$
 $\sin B = \frac{4\sqrt{14}}{15}$ より $\cos B = \frac{1}{15} \cdot 20 > 1$ となり、
 $AC^2 = 9 + 25 - 30 \times \frac{1}{15} = 32$
 $AC > 0$ より $AC = 4\sqrt{2}$

(3) $2\sqrt{14} = \frac{1}{2}r(3+5+4\sqrt{2})$
 $\therefore r = \frac{4\sqrt{14}}{8+4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{14}+4\sqrt{2}}{4-2} = \sqrt{14} + \sqrt{2}$

(4) $2\sqrt{14} = \frac{3 \times 5 \times \sin B}{4R} \therefore R = \frac{60\sqrt{2}}{8\sqrt{14}} = \frac{15\sqrt{28}}{28} = \frac{30}{28}\sqrt{7} = \frac{15}{14}\sqrt{7}$

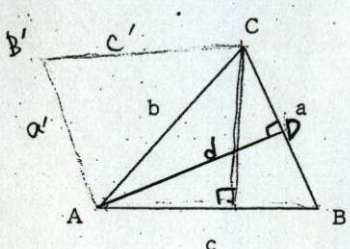
(5) $4\sqrt{14} = \frac{4\sqrt{2} \times AD^2}{4 \times \frac{15}{14}\sqrt{7}} \therefore AD^2 = \frac{4\sqrt{14} \times 14 \times \sqrt{7}}{14 \times 4\sqrt{2}} \therefore AD = \sqrt{70}$
 $= \frac{\sqrt{7}}{14} \times 60\sqrt{7} = 30$

それらのことを正すためにも、⑥の評価こそ「表現」の観点に重きを置き、評価すべきであったと反省している。

以下に、実際の解答と評価事例（資料7～11）を挙げる。

資料7 パフォーマンス課題①解答例及び評価

【公式】 $S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin A$



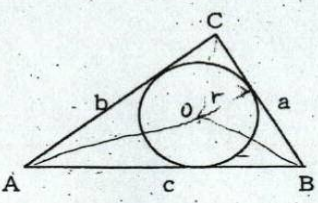
【各自で考えた解答】 点Aから辺BCに垂直な線分の足をDとし、 $\triangle ADC$ と $\triangle ADB$ が出来る。
 又、 $\triangle ADB$ の面積は $\frac{a}{2} \times d = \frac{ad}{2}$
 $\triangle ADC$: $\frac{a}{2} \times d = \frac{ad}{2}$

【グループで考えた解答】
 点Cから辺ABに垂直な線分の足をDとする。
 $b \sin A = CD$ となる。
 又、 $S = \frac{1}{2} c \cdot CD$
 $= \frac{1}{2} c b \sin A$
 $= \frac{1}{2} bc \sin A$

この解答の評価は、[各自で考えた解答]においては、考え方1点、処理1点、表現3点とした。底辺と高さが必要となることを考え、頂点から垂線を下ろしたところを評価して、考え方で1点の得点を与えた。また式のみを羅列したのではなく、説明文をしっかりと書いている所を評価して、表現で3点を与えた。[グループで考えた解答]においては、それぞれの項目で5点満点の得点とした。

資料8 パフォーマンス課題②解答例及び評価

【公式】 $S = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (a + b + c)$



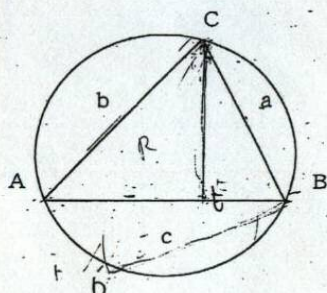
【各自で考えた解答】
 内接円の中心をOとする
 $\triangle AOB$ において底辺c高さrより
 $\triangle BOC$ において底辺a高さrより

【グループで考えた解答】
 内接円の中心をOとする
 $\triangle AOB$ において底辺c高さrより面積 S_1 は
 $S_1 = \frac{1}{2} cr$
 $\triangle BOC$ において底辺a高さrより面積 S_2 は
 $S_2 = \frac{1}{2} ar$
 $\triangle COA$ において底辺b高さrより面積 S_3 は
 $S_3 = \frac{1}{2} br$
 よって
 $S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{1}{2} r(a + b + c)$

この解答の評価は、[各自で考えた解答]においては、考え方3点、処理1点、表現3点とした。 $\triangle ABC$ を三つの三角形に分けて考えるという方向性は理解していると考え、考え方は3点、そのうちの二つの三角形の底辺及び高さを理解しているところを評価して処理1点、表現も内接円の中心などの表記があるところから3点とした。[グループで考えた解答]においては、考え方5点、処理5点、表現3点とした。表現で2点減点した理由は、中心Oから内接円と辺の接点へ引いた線分は辺と垂直になるという表記がなかったためである。

資料9 パフォーマンス課題③解答例及び評価

【公式】 $S = \frac{abc}{4R}$



【ヒント】
 1 2点B, Cを頂点の一部とし, 一边を外接円の直径とする△BCDを考える。
 2 点Cから辺ABに垂線を下ろす。
 3 三角形の相似を利用する。

$\frac{abc}{4R}$
 $\frac{1}{2} \times c \times b \sin A$
 $\frac{ab}{2R}$
 $b \sin A = \frac{ab}{2R}$
 $b: 2R = a \sin B$
 $2R \sin B = ab$
 $b: 2R = b \sin A : a$
 $2R \sin A = a$

【各自で考えた解答】
 ① CDが外接円の直径となるように点Dをとると。
 $\angle DBC = 90^\circ$ より
 $\triangle DBC$ の面積は $DB \times CB \times \frac{1}{2}$... ①
 ② 辺CDと辺ABの交点をEとすると
 $\triangle AEC \sim \triangle DEB$ より
 $DB = kb \cdot \text{①}$ (kは定数)
 $AE:EC = DE:EB$
 $AE+EB = c$ $EC+DE = 2R$ より
 $c-EB: 2R-DE = DE: EB$
 $(2R-DE)DE = (c-EB)EB$

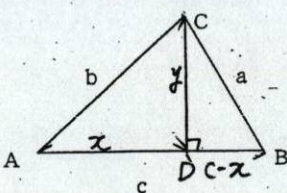
【グループで考えた解答】
 点Cから辺ABに向かい下ろした垂線の足をE、
 CDを外接円の直径となるように点Dをとると。
 $CE = b \sin A$ より $\triangle ABC$ の面積は $S = \frac{1}{2} \times c \times b \sin A$
 と表せる ... ①
 ② $\triangle AEC \sim \triangle DEB$ より $CD = 2R$ ので
 $b: 2R = b \sin A : a$ ①に②を代入して
 $\therefore b \sin A = \frac{ab}{2R}$... ② $S = \frac{1}{2} \times c \times \frac{ab}{2R}$
 $= \frac{abc}{4R}$

この解答の評価は、[各自で考えた解答]においては、考え方3点、処理1点、表現3点とした。この解答をした生徒には「相似を利用する」というヒントのみを与え、解答に臨ませたが、底辺や高さとは直接関係のない三角形の相似を考え解答を進めたため、正答には至らなかった。しかし、ルーブリックに「関心・意欲・態度」の観点があれば高く評価されたであろう。

[グループで考えた解答]においては、考え方5点、処理3点、表現3点とした。処理及び表現で2点減点した理由は、①の公式に変形する必要はないにもかかわらず変形している点、三角形の相似条件が表記されていない点から減点することとした。

資料10 パフォーマンス課題④解答例及び評価

【公式】 $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ただし、 $2s = a + b + c$



$\frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c} = b^2 - y^2$

【解答】
 A-B) 点Cから辺ABに垂線を下ろし、その足をD、またAD=x、CD=yとする。
 $y^2 = b^2 - x^2$

△ACDで三平方の定理より $b^2 = x^2 + y^2 \therefore x^2 = b^2 - y^2 \dots ①$

また、△BCDで三平方の定理より $a^2 = (c-x)^2 + y^2 \quad a^2 = c^2 - 2xc + x^2 + y^2$

$\therefore x^2 = a^2 - c^2 - y^2 + 2xc \dots ②$

①、②よりx²を消去すると $x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$

これを①に代入して $y^2 = b^2 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2}$

$\therefore 4c^2 \cdot y^2 = 4c^2 b^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$

$= (2bc + (b^2 + c^2 - a^2))(2bc - (b^2 + c^2 - a^2))$

$= -(a^2 - (b+c)^2)(a^2 - (b-c)^2)$

$|x(a^2 - (b+c)^2)| = (b+c-a)(b+c+a)(a-b+c)(a+b-c)$

ここで $2s = a + b + c$ とすると

$\therefore c \cdot y = \sqrt{4s(s-a)(s-b)(s-c)}$

よって

$S = \frac{1}{2} \cdot c \cdot y = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

パフォーマンス課題④は穴埋め形式のため、[各自で考えた解答]と[グループで考えた解答]との区別をつけるため、各自での解答終了後、自分で解答をした部分にアンダーラインを引くことで評価しやすいようにした。

この解答の評価としては[各自で考えた解答]においては、「知識・理解」3点、「数学的な技能」0点とした。多くの文字を含む計算になると、どの文字について整理していけばよいのかが分からなくなるという、本校に多く見られる課題がこの解答からも見受けられた。しかし[グループで考えた解答]においては、「知識・理解」及び「数学的な技能」ともに満点をつけた。グループ学習においては、友人と式変形を確認し合いながら解答をつくる姿勢が見受けられ、公式を正しく導いた際にはグループ一同歓声が上がっていた。

資料 11 パフォーマンス課題⑤解答例及び評価

⑤ あなたが①～④で求めた公式の特徴を文章で述べなさい。

例) 公式: (三角形の面積 S) = (底辺) × (高さ) ÷ 2

【特徴】 底辺と高さが分かっているときに使用すると効果的である。なお底辺は、条件によって見方を変えることも大切である。

【①の特徴】

2辺とその間の角の $\sin\theta$ がわかるときに使用する。
2角と1辺がわかっているときは正弦定理などをうまく
利用して2辺とその間にもちこむことかこの方法で面積を
求める最大のテクニックとなる。

【②の特徴】

内接円の半径と三角形の3辺すべてがわかっているときに使用する。
また逆に三角形の面積と3辺がわかっているときに内接円の半径 r を
求めることができる。

【③の特徴】

外接円の半径と三角形の3辺すべてがわかっているときに使用する。
また逆に三角形の面積と3辺がわかっているときに外接円の半径 R を
求めることができる。

【④の特徴】

3辺がわかっているときはどんな三角形でもあらかじめ面積を求めこ
かた。他の方法で面積を求めたのち、適宜に用いることを
する。

この解答の評価は、[各自で考えた解答]においては、①～③の特徴では「関心・意欲・態度」「考え方」「表現」の3観点とも満点をつけた。しかし、④の特徴では、単一的な特徴の捉え方しかできていないと判断し、「考え方」の観点では2点減点の1点とした。

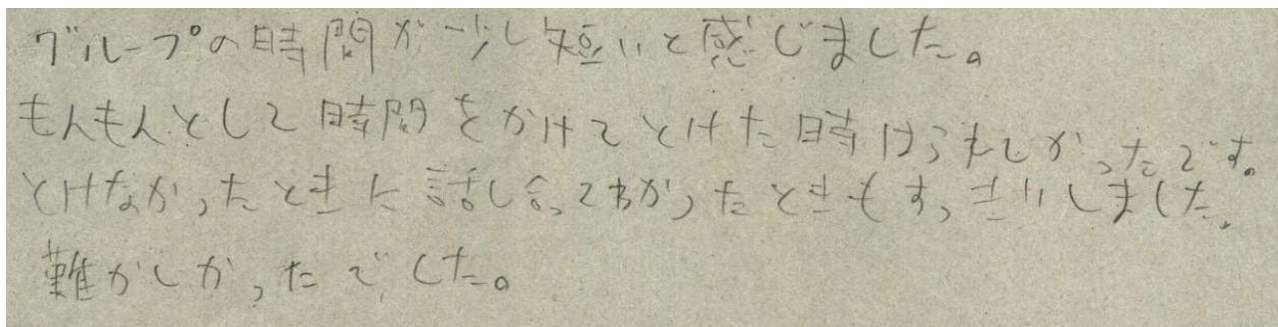
しかしながら、演習問題等でそれぞれの公式がどのように使用されるかというポイントを押さえており、「関心・意欲・態度」の観点では満点の3点を超える得点を与えたいと感じた。

(3) まとめと今後の課題

今回は三角形の面積の公式を導く考察を通して、言語活動の充実を図り、幅広い視野をもって問題に取り組むことができる能力を育むことをねらいとして授業を行った。

アンケート結果から、グループ学習を通してコミュニケーション能力の必要性を生徒が多少なりとも感じ取ったことは、以下の回答(資料12)からもうかがえる。

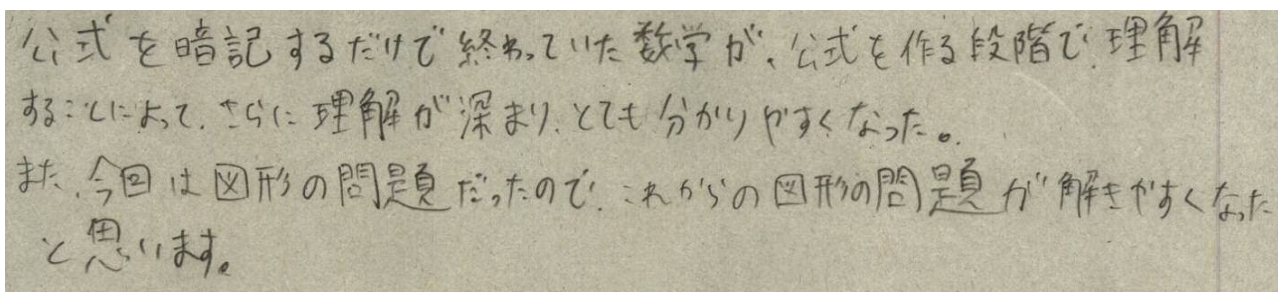
資料 12 授業アンケート5の回答事例①



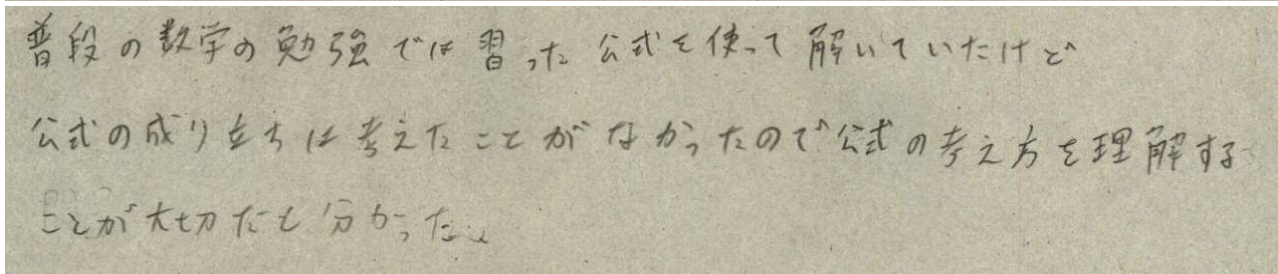
グループの時間が少し短いと感じました。
 一人一人として時間をかけてくれた時、けろましかったです。
 とけなかつたときと話し合、ておかつたときも、まじりました。
 難かしか、たで、した。

また、物事の本質を理解した上で取り組むことの重要性についても、以下のアンケートの回答(資料13)からも生徒に伝わったようである。

資料 13 授業アンケート5の回答事例②



公式を暗記するだけで終わっていた数学が、公式を作る段階で理解
 することによって、さらに理解が深まり、とても分かりやすくなった。
 また、今回は図形の問題だったので、これからの図形の問題が解きやすくなった
 と思います。



普段の数学の勉強では習った公式を使って解いていたけど
 公式の成り立ちを考えたことがなかったので、公式の考え方を理解する
 ことが大切だと分かった。

また、「考える力が身に付いたと思いますか」という問いについては、「そう思う」「まあそう思う」と全員が回答している。本校生徒にとって、授業時間内にこのような学習形態を取り入れることは、効果のある形態であることが判明した。

ふだんでは評価しにくい「関心・意欲・態度」「数学的な見方や考え方」を、ワークシートに書かれた解答でルーブリックを基に評価していったが、評価基準となるルーブリックの作成に思いの外時間を費やすこととなった。「各設問における評価の観点をどのように設定することが、本校生徒に適しているのか」ということから始まり、「設定した観点をより評価しやすくするためのワークシートの変更」などを繰り返し行った。最終的には前述したワークシート及びルーブリックに落ち着いたが、率直な感想としては、今回のように教員一人が担当し単独クラスで実施できるような場合は、大まかなルーブリックを作成した後、生徒の解答を一度評価した上で、再度ルーブリックを改定し最終的な評価を行う方が、授業進度や生徒の能力に的確に合わせることができ、より正確に評価できるのではないかとと思われる。

しかし、多くの教員で分担し授業を行う場合や、さまざまな生徒に対して同一のパフォーマンス課題を実施する場合は、事前に的確な評価基準を定めておく必要があり、かなり綿密な打ち合わせが必要となる。

今後継続してこの取組を行うのであれば、複数の学校で同一のパフォーマンス課題でワークシート及びルーブリックを作成し、評価の在り方を研究したい。

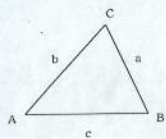
資料 14 ワークシート

数学発展2 「三角形の面積公式」 No. 1

3年1組()番()

① 小学校で学習した (三角形の面積S) = (底辺) × (高さ) ÷ 2 を実形して、次の三角形の面積の公式を導きなさい。但し、図のように各頂点A, B, Cの対辺の長さをa, b, cまた、 $\angle ABC=B, \angle BCA=C, \angle CAB=A$ とする。

【公式】 $S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin A$

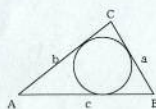


【各自で考えた解答】

【グループで考えた解答】

② 小学校で学習した (三角形の面積S) = (底辺) × (高さ) ÷ 2 を利用して、次の三角形の面積の公式を導きなさい。但し、図のように各頂点A, B, Cの対辺の長さをa, b, cまた、 $\angle ABC=B, \angle BCA=C, \angle CAB=A$ 、内接円の半径をrとする。

【公式】 $S = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (a+b+c)$

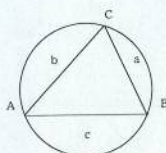


【各自で考えた解答】

【グループで考えた解答】

③ 小学校で学習した (三角形の面積S) = (底辺) × (高さ) ÷ 2 を利用して、【ヒント】の手順に従って次の三角形の面積の公式を導きなさい。但し、図のように各頂点A, B, Cの対辺の長さをa, b, cまた、 $\angle ABC=B, \angle BCA=C, \angle CAB=A$ 、外接円の半径をRとする。

【公式】 $S = \frac{abc}{4R}$



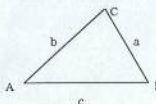
- 【ヒント】
- 1 点B, Cを頂点の一部とし、一辺を外接円の直径とする△BCDを考える。
 - 2 点Cから辺ABに垂線を下ろす。
 - 3 三角形の相似を利用する。

【各自で考えた解答】

【グループで考えた解答】

④ 小学校で学習した (三角形の面積S) = (底辺) × (高さ) ÷ 2 を利用して、次の三角形の面積の公式を導くように空欄をうめなさい。但し、図のように各頂点A, B, Cの対辺の長さをa, b, cまた、 $\angle ABC=B, \angle BCA=C, \angle CAB=A$ とする。

【公式】 $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ただし、 $2s = a+b+c$



【解答】
 点Cから辺ABに垂線を下ろし、その足をD、またAD=x, CD=yとする。
 $\triangle ACD$ で三平方の定理より $b^2 = \square \therefore x^2 = \square \dots \textcircled{1}$
 また、 $\triangle BCD$ で三平方の定理より $a^2 = \square$
 $\therefore x^2 = \square \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ より x^2 を消去すると $x = \square$
 これを $\textcircled{1}$ に代入して $y^2 = \square$
 $\therefore 4c^2 \cdot y^2 = 4c^2 b^2 - (\square)$
 $= (2bc + (\square)) (2bc - (\square))$
 $= -\{a^2 - (\square)\} \{a^2 - (\square)\}$
 $= (\square) (\square) (\square) (\square)$
 ここで $2s = a+b+c$ とすると
 $\therefore 4c^2 \cdot y^2 = 2s (\square) (\square) (\square)$
 $\therefore c \cdot y = \square$
 よって
 $S = \frac{1}{2} \cdot c \cdot y = \square$

数学発展2 「三角形の面積公式」 No. 2

3年1組()番()

⑤ あなたが①～④で求めた公式の特徴を文で述べなさい。
 例) 公式: (三角形の面積 S) = (底辺) × (高さ) ÷ 2
 【特徴】 底辺と高さが分かっているときに使用すると効果的である。なお底辺は、条件によっ
 て見方を覚えることも大切である。

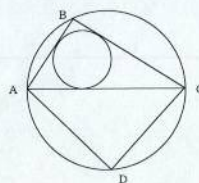
【①の特徴】

【②の特徴】

【③の特徴】

【④の特徴】

⑥ 図のように半径 R の円に内接する面積 $2\sqrt{14}$ の $\triangle ABC$ があり、 $AB=3$ 、 $BC=5$ である。
 以下の問に答えよ。



- (1) $\sin B$ の値を求めよ。
- (2) AC の長さを求めよ。
- (3) $\triangle ABC$ の内接円の半径 r を求めよ。
- (4) $\triangle ABC$ の外接円の半径 R を求めよ。
- (5) 弧のようにならぬ弧 AC の弧を含まない弧上に $AD=CD$ となるように点 D をとる。
 $\triangle ADC$ の面積が $4\sqrt{14}$ のとき、 AD を求めよ。

資料15 授業アンケート

「三角形の面積公式」授業アンケート

1～4の質問について、最も該当とする記号に○をつけなさい。

- 1 今回の授業を通して、考える力が身についたと思いますか。
 ア そう思う イ まあそう思う ウ あまり思わない エ 全く思わない
- 2 今回の授業を通して、論理的な文章の書き方が身についたと思いますか。
 ア そう思う イ まあそう思う ウ あまり思わない エ 全く思わない
- 3 今回の授業の難易度はあなたにとってどうでしたか。
 ア 易しかった イ やや易しかった ウ 普通だった
 エ やや難しかった オ 難しかった
- 4 今回の授業の内容は理解できましたか。
 ア 理解できた イ だいたい理解できた
 ウ あまり理解できなかった オ 理解できなかった
- 5 今回の授業の感想を述べてください。

体積を微分すれば面積になる？

1 学習活動の概要

(1) 科目・単元名

数学Ⅲ・体積

(2) 単元の目標

積分の考え方について理解し、それらの有用性を認識するとともに、事象の考察に活用できるようにする。

(3) 単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	知識・理解
定積分を用いて、いろいろな関数で囲まれた図形の面積、回転体の体積や曲線の長さについて考察しようとする。	いろいろな関数で囲まれた図形の面積や、回転体の体積、曲線の長さについて考察することができる。	いろいろな関数で囲まれた図形の面積や、回転体の体積、曲線の長さを求めることができる。	定積分と面積、体積、曲線の長さの関係を理解している。

(4) 取り上げる言語活動と教材（課題）

ア 言語活動

半径 r の円の面積 πr^2 を r で微分すると、 $2\pi r$ となり、円周の長さ公式になる。同様に半径 r の体積の公式 $\frac{4}{3}\pi r^3$ を r で微分すると $4\pi r^2$ となり、球の表面積の公式となる。

しかし、一辺の長さ x の立方体の体積 x^3 を x で微分しても表面積 $6x^2$ にはならない。その理由について考えさせる。

イ 教材（課題）

パフォーマンス課題は以下の3問である。

問1	半径 r の円の面積 πr^2 と周の長さ $2\pi r$ の間に成り立つ関係式を考えよう。またその関係式が成り立つ理由も考えよう。
問2	半径 r の球の体積 $\frac{4}{3}\pi r^3$ とその表面積 $4\pi r^2$ の間に成り立つ関係式を考えよう。またその関係式が成り立つ理由も考えよう。
問3	立方体の体積と表面積には問1、2のような関係はあるだろうか、その理由も含めて考えてみよう。

個々にワークシート（パフォーマンス課題）を与えて、まず問1を時間を決めて取り組ませる。その後解説し、続けて問2、問3に取り組ませる。その後プリントは回収及び優れた解答を印刷したものを生徒に配布する。

(5) 単元の指導計画

体積・・・・・・・・・・2時間

回転体の体積・・4時間（パフォーマンス課題は最後の時間に実施）

(6) ルーブリック (評価基準表)

評価	関心・意欲・態度	考え方	表現
	数学の理論や体系に関心をもち、積極的に活用しているか。	数学的に筋道立てた考え方をしているか。	考え方をきちんと説明・表現できているか。
A 3	問1において円の面積の式を半径 r で微分すると円周を表すことに気付いた。または、それ以外の円の面積と円周との関係に気付いた。	問1において半径 r の増加分 dr が十分小さいときその際の面積の増加分 dS は円周 $L(r)$ を用いて $dS = L(r)dr$ が成り立っていることを示した上で、 $\frac{dS}{dr} = L(r)$ つまり $S'(r) = L(r)$ を示すことができた。またはこれに準ずる説明がなされた。	式の羅列にならず、必要な文章が書かれている。
B 2	問1では関係式に気付くことができなかったが、問2の球の体積の式を半径 r で微分すると表面積の式となることに気付いた。または、それ以外の球の体積と表面積の関係に気付いた。	問1はできなかったが、問2において半径 r の増加分 dr が十分小さいときであれば、その際の体積の増加分 dV は表面積 $S(r)$ を用いて $dV = S(r)dr$ が成り立っていることを示し、そこから $\frac{dV}{dr} = S(r)$ つまり $V'(r) = S(r)$ を示すことができた。またはこれに準ずる説明がなされた。	式の羅列になっており、必要な文章が書かれていない。
C 1	円の面積と円周との間に成り立つ関係式及び、球の体積と表面積との間に成り立つ関係式に気付くことができなかった。	意味のない計算。数学的操作が全く行われていない。	数学的表現がない。

2 解説

(1) 指導事例と学習指導要領との関連

「学習指導要領 数学Ⅲ 3内容」には次のように示されている。

積分法についての理解を深めるとともに、その有用性を認識し、事象の考察に活用できるようにする。

本事例では、微分・積分の考え方を理解することで、円の面積と長さ、球の体積と表面積の関係について考察させることを意図している。

(2) 言語活動の充実の工夫

パフォーマンス課題の評価を的確に行うため、自分の考えを記述させる欄と板書、他の生徒の発言をまとめる欄を分けた。これにより、自分の考えをもつこと、更に互いの考えを伝え合うことで、自分の考えや集団の考えを発展させることができると考えた。

3 実践報告

7月8日(火)7限目に3年9組にて実施した。まずパフォーマンス課題を配布し、本日の授業について説明した。その際、「自分の考え」と「板書、他の生徒の発言」についてはそれぞれの欄に記述するように伝えた。

問1に10分ほど各自で取り組ませた。その際他の生徒とは相談しないように伝える。10分後、生徒に πr^2 と $2\pi r$ との関係式には何があるか発言を求めたが、手を挙げる者がいなかったため、指名し発言を求めた。最初の生徒が πr^2 を r で微分すると $2\pi r$ となることを発言し、次の生徒が r で積分すると πr^2 となることを発言した、その後何人か指名したが特に新しいものは出なかった。

次になぜそのような関係式が成り立つか説明を求めたが、ここでも手が挙がらなかったため指名すると、数名の「分かりません」という発言が続いた後、円の半径 r を0から r まで変化させて次々にその円の面積を足すと半径 r の円になるという趣旨の発言が出る。また、他の生徒からは円を放射線状に n 等分すると n 個の扇形ができる。その扇形は近似的に長辺の長さが r の2等辺三角形であり円周の長さを l として、短辺の長さを dl とおくと扇形の面積は $\frac{1}{2}r dl$ となり、これを n 個足したものが

円の面積になる。よって $\frac{1}{2}r dl \times n = \pi r^2$ が成り立ち、 $dl \times n$ が円周を表わすので、円の面積と円周には関係があるとの趣旨の発言が出る。これらの発言内容に対し特に教員から評価することはしなかった。

次に問2に10分ほど取り組ませた。ここでも他の生徒との相談はしないように伝える。その後、指名し $\frac{4}{3}\pi r^3$ と $4\pi r^2$ との関係式について何があるか発言を求めると、 $\frac{4}{3}\pi r^3$ を r で微分すると $4\pi r^2$ となること、及び $4\pi r^2$ を r で積分すると $\frac{4}{3}\pi r^3$ となることはすぐに出てきた。

なぜそうなるかについては、球の半径 r を0から r まで変化させて次々にその球の体積を足すと半径 r の球の体積になるという問1を踏襲した発言が出た。

ここまでで残り時間が10分を切っていたため、問3には進まず問1の簡単な解説を行った後、アンケートを配布、記入してもらい論証プリントとともに回収して授業を終えた。

次にパフォーマンス課題の評価に入るのであるが、授業において問3ができなかったため、評価基準の変更を余儀なくされた。その上で採点し評価を与えた。その結果、各評価基準の平均点は次のとおりである。

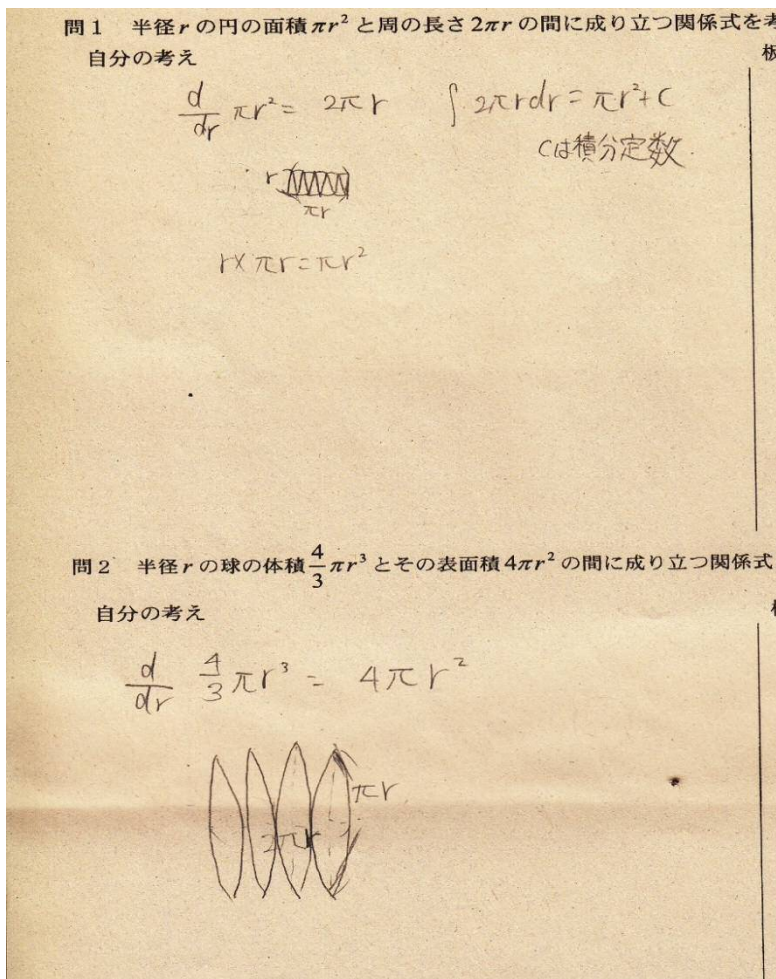
(1) 各評価基準の平均点

資料1 各評価基準の平均点

関心・意欲・態度 3点満点	考え方 3点満点	表現 3点満点	合計 9点満点
2.7	1.4	2.4	6.5

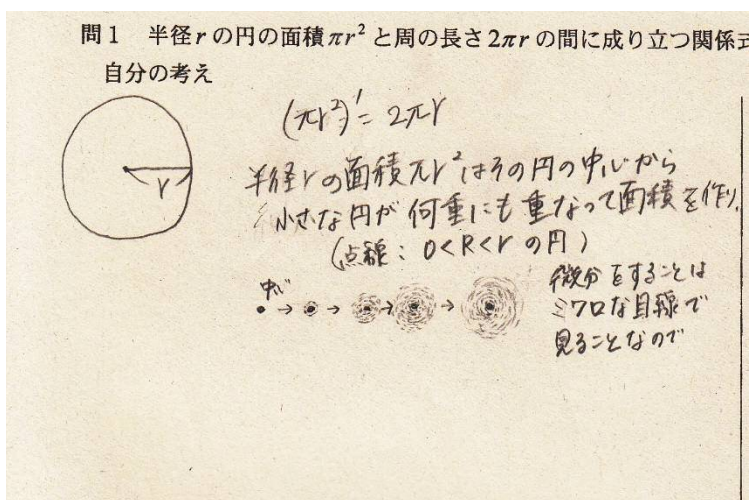
(2) 生徒のパフォーマンス課題の取組例と評価

資料2 生徒の取組例 考え方で1点だった生徒の例



多くの生徒が、このように記述しており、微分、積分の関係には気付いたが、説明の仕方が分からなかったようである。

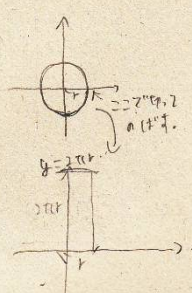
資料3 生徒の取組例 考え方で2点を与えた生徒の例

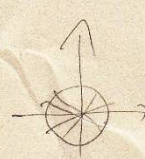


微小面積を足し集めることは考えられたが、式を立てることはできなかった。

資料4 生徒の取組例 考え方で3点を与えた生徒の例①

問1 半径 r の円の面積 πr^2 と周の長さ $2\pi r$ の間に成り立つ関係式を考えよう。またその関係式が成り立つ理由も考えて

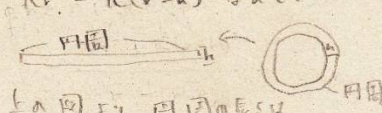
自分の考え
 上の式は、
 $2\pi r \xleftarrow{\text{積分}} \pi r^2 \quad (\pi r^2)' = 2\pi r$
 理由は、

 $\int_0^r 2\pi r \, dr$
 $= [\pi r^2]_0^r = \pi r^2 - 0 = \pi r^2$


板書、他の生徒の発言

 $\Delta s = \frac{1}{2} r \times 2\pi r \cdot \Delta \theta$
 $ds = \pi r + dr \cdot r = \pi r + 2\pi r dr$
 $ds = 2\pi r dr$
 $\frac{ds}{dr} = 2\pi r$
 $S = \pi r^2$
 $Sols = \int 2\pi r \, dr$

問1において、半径 r の増加に伴う面積の増加分を図形的に $2\pi r \, dr$ と考えている点を評価した。

資料5 生徒の取組例 考え方で3点を与えた生徒の例②

問1 半径 r の円の面積 πr^2 と周の長さ $2\pi r$ の間に成り立つ関係式を考えよう。またその関係式が成り立つ理由も考えて

自分の考え
 πr^2 を r で微分すると、 $2\pi r$
 半径 r と半径 $r-h$ の円の面積の差は
 $\pi r^2 - \pi(r-h)^2$ となる。

 上の図より、円周の長さ $2\pi r$
 $\frac{\pi r^2 - \pi(r-h)^2}{h}$ となる。
 h が限りなく小になると
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\pi r^2 - \pi(r-h)^2}{h} = \frac{f(r) - f(r-h)}{h}$
 $= f'(r) = 2\pi r$

板書、他の生徒の発言
 積分はよおす


問2 半径 r の球の体積 $\frac{4}{3}\pi r^3$ とその表面積 $4\pi r^2$ の間に成り立つ関係式を考えよう。またその関係式が成り立つ理由も考えて

自分の考え
 $\frac{4}{3}\pi r^3$ を r で微分すると、 $4\pi r^2$
 半径 r と半径 $r-h$ の球の体積の差は
 $\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi(r-h)^3$
 $\frac{4}{3}\pi r^3$ の体積は、表面積 $4\pi r^2$ h となるので、
 $\frac{\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi(r-h)^3}{h}$ となる。
 h は極限まで小になると、
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi(r-h)^3}{h} = \frac{f(r) - f(r-h)}{h} = f'(r) = 4\pi r^2$

板書、他の生徒の発言

この生徒は、問1では図形的な考察の上で、 $S'(r)$ の式を立てたこと、及び問2においても同様に $V'(r)$ を求めている点を評価した。

全体としては、生徒はおおむね意欲的に授業に取り組んだため、授業前に心配していた白紙での提出は、ほとんど見当たらなかった。

また、多くの生徒が円の面積と円周の長さの関係及び球の体積と表面積の関係には気付くことができたため、関心・意欲・態度の評価は高かった。反面その関係を論理的に説明することは難しかったらしく、あまり書いてなかった。そのため考え方の評価は低いものになった。

(3) アンケート結果 (43名)

資料6 アンケート

1 考える力が身に付いたと思いますか。			
ア そう思う	イ まあそう思う	ウ あまり思わない	エ 思わない
8	29	6	0
18.6%	67.4%	14.0%	0.0%

2 論理的な文章の書き方が身に付いたと思いますか。			
ア そう思う	イ まあそう思う	ウ あまり思わない	エ 思わない
6	11	23	3
14.0%	25.6%	53.5%	7.0%

3 授業の難易度はあなたにとってどうでしたか。				
ア 難しかった	イ やや難しかった	ウ 普通だった	エ やや易しかった	オ 易しかった
25	11	5	2	0
58.1%	25.6%	11.6%	4.7%	0.0%

4 授業の内容は理解できましたか。			
ア 理解できた	イ だいたい理解できた	ウ あまり理解できなかった	エ 理解できなかった
17	22	4	0
39.5%	51.2%	9.3%	0.0%

5 今日の授業の感想を書いてください。
<ul style="list-style-type: none"> ・ 考えれば分かるけれど、それを言葉や式で表すのは難しかったです。 ・ 問3の答えが知りたかった。 ・ 今まで習ったことで、円の周の長さと同面積の関係を考えられたのがおもしろかった。 ・ 難しい！ ・ おもしろかった！ ・ 数学を論理的に考えるのが、大人の数学っぽくておもしろかったです！！ ・ 微分や積分について本質的に理解していないと文章は書けないなと思いました。 ・ 違った見方が分かっておもしろかった。 ・ 7時間目の雰囲気の中では大変きつい授業だと思う。みんなでも話し合う時間があればよいと思う。 ・ 自分のアイデアがあまり解に直結しなかった。

- ・ 分かりやすく説明を考えるのが、難しかった。
- ・ 自分が知っていた公式の導き方を改めて知ることができ、新しい導き方も知れてよかった。
- ・ ただ問題を解くいつもの授業と違い、そうなる根拠を考えることができてもよかった。
- ・ 時間が足りない。
- ・ たまにはあっていいと思う。
- ・ 公式と公式の間に関係式があるとは全く思わなかった。
- ・ 言われれば分かるけど、自分で導けるかは分からない。
- ・ 楽しかった！！
- ・ 円の公式が解明されて感動した。
- ・ いつもは考えないことを考えたので新鮮だった。
- ・ 関係式をつくるのにいろいろな方法があってもよかった。

(4) まとめと今後の課題

今回の取組から得られた課題は次の二つである。

ア パフォーマンス課題の難易度の設定が難しい

生徒にとって、易しすぎず、難しすぎずというレベル設定することはかなり大変なことであると感じた。また同じ趣旨の問題であっても、聞き方を変えるだけで生徒の反応が変わることも十分あり得ると感じた。そういう意味でも、問題の設定は十分考えた上で出題しなければならない。

イ ルーブリックの設定は最低2回必要である

事前にルーブリックを作成して授業に臨んだが、結局問3はできなかつたため、ルーブリックの変更を余儀なくされた。また、採点過程においても想定外の解答も多く、評価に困ることも多かった。今後このような授業を行う場合には、事前に作成したルーブリックはあくまで案であり、授業後にルーブリックを完成させるという認識が必要だと感じた。

(5) おわりに

アンケートでは8割以上の者が課題の難易度について「難しかった」「やや難しかった」と答えているとおり、課題の難易度としては生徒にとって高かったと思われる。一方で「考える力が付いたか」という問に対して、8割以上の者が「そう思う」「まあそう思う」と答えている。これは難しい課題に対して生徒が一生懸命に考えたことを示していると思う。このことは、パフォーマンス課題の設定をする際に、生徒にとって難しいから不適切であるとは一概には言えないのではないかと感じた。そういう意味でも課題の難易度の設定は難しいと思う。

ふだんの授業では、例題を説明し、その類題を生徒たちが演習するという形式の授業を展開しているが、今回の取組の様子とアンケート結果を見ると、生徒たちが主体的に“考える”という活動が少ないということがわかった。その点ではこのような取組を定期的には実施することは、生徒にとって大いに刺激になると思われる。また、ルーブリックの作成も含めた評価を行う過程は大変であったが、その取組自体が自分にとって、授業を見直すよい機会になったことは間違いない。生徒だけでなく教員にとっても大変価値のある取組であると感じた。今後も機会をつくり取り組んでいきたい。

モンティ・ホール問題を考える

1 学習活動の概要

(1) 科目・単元名

数学A・場合の数と確率 ～条件付き確率～

(2) 単元の目標

条件付き確率の意味を理解し、さまざまな事象の考察に活用できるようにする。

(3) 単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	知識・理解
・条件付き確率や確率の乗法定理の考えに興味・関心をもち、積極的に活用しようとする。	・条件付き確率や乗法定理を具体的な例から直感的に考え、考察することができる。	・条件付き確率を、記号を用いて表すことができる。 ・条件付き確率の式から確率の乗法定理の等式を導くことができる。	・確率の乗法定理を用いて二つの事象がともに起こる確率を求めることを身に付けている。 ・条件付き確率や確率の乗法定理を用いた確率の計算方法を身に付けている。

(4) 取り上げる言語活動と教材（課題）

ア 言語活動

- ・自分ならどうするかを考え、グループ内で発表や検証を行うこと。
- ・どちらが得かを考え、確率を活用して解決する課題として次の問題を提示する。

イ 教材（課題）

三つの箱があり、そのうち一つが当たりである。あなたは当たりの箱を選びたい。一つの箱を選んで開けようとする、主催者が残った二つの箱のうち、はずれの箱を開け、「箱を選び変えてもいいですが、どうしますか?」と言いました。さあ、あなたならどうしますか?

(5) 単元の指導計画（全3時間）

	学 習 活 動	言語活動に関する指導上の留意点
第1次 (1)	・条件付き確率について理解し、それを用いて実際の問題を解く。	・定義に基づいての計算だけではなく、感覚的にも理解できるよう、考え方をお互いに説明させる。
第2次 (2)	・条件付き確率や乗法定理が適用できる事象を考察し、それを利用して問題を解決する。	・自分ならどうするかを考えたり、実験の結果を踏まえながら生徒同士で議論したりする中で解決させる。

(6) ルーブリック (評価基準表)

質問①

関心・意欲・態度	
	数学の論理や体系に関心を持ち、積極的に活用しているか。
5点	自分ならどうするかが確率の計算による根拠とともに書くことができる。
3点	自分ならどうするかが根拠とともに書くことができる。(1/2や1/3などの数値が書かれている)
2点	自分ならどうするかが根拠とともに書くことができる。(数値は書かれていない)
1点	自分ならどうするかが書かれているが、根拠が示されていない。もしくは、根拠になっていない。
0点	興味・関心を示さず、何も書いていない。

質問②

表現	
	方法や結果をきちんと説明・表現できているか。
5点	方法が具体的に書かれており、結果も表などを用いて、分かりやすく書かれている。さらに、推測(「変える」方が2倍当たりやすそうだ等)にも触れている。
3点	方法が具体的に書かれており、結果も表などを用いて、分かりやすく書くことができる。
1点	具体的ではないが方法や結果が書くことができる。
0点	やっていることを理解しておらず、説明できない。または説明におかしな点がある。

質問③

考え方		処理	
	数学的に筋道立てた考え方をしているか。		解法の手続きを正しく実行できているか。
5点	実験結果で回数の多かった方に行動すると書かれている。 箱Bを開けたときに箱Aが当たる確率と箱Cが当たる確率を求め、確率が大きい方を選べばいいことが書かれている。	5点	「変えない」確率が1/3で「変える」確率が2/3であることが導かれている。
2点	確率を求めればよいということが書かれている。	3点	条件付き確率を計算しようとしている。
1点	実験結果の意味を理解しており、回数の多かった方に行動すると書かれている。	1点	条件付き確率ではないが、何かしら確率を計算しようとしている。
0点	実験結果の意味が理解できておらず、行動が一致していない。	0点	確率の計算を全くしようとしていない。

2 解説

(1) 指導事例と学習指導要領との関連

(1) イ (ウ) 条件付き確率の意味を理解し、簡単な場合について条件付き確率を求めること。また、それを事象の考察に活用すること。

本事例で取り上げる課題は、大方の生徒の予想とは異なる結果となることが多い。条件付き確率を事象の考察に活用することで、直感では誤解してしまうような事象の確率がしっかり解析できることを実感する。実際にグループで実験し、その結果を検証することで確率の有用性を認識する。また、箱の数を増やしたときを考えたりすることで、思考の過程や判断の根拠などを数学的に表現して説明する。なお、課題学習の意味合いも含む。

(2) 言語活動の充実の工夫

○ 生徒に自分ならどうするかを考えさせる。

問題の意味を理解させるためや問題に興味をもたせるため、実際に代表者に前に出てきてもらい、教員が主催者役になり実験を行う。また、感覚的には伝わっていると思うが、当たりの箱を選んだ場合、主催者は確率 $1/2$ で残りの箱の片方を開けるとする。これを数回実験する中で説明しておく。その後、生徒に自分ならどうするかを考えさせワークシート（質問①）を記入させる。

○ グループで実験する。

3～4名のグループで実験をする。各グループに例えば3枚のトランプ（ハートのAを当たりとするなど）などを渡し、主催者役とお客役を決め何回か実験させ（役割や方法、回数などは細かく指示せずグループごとの話し合いに任せる）、結果を導く。30回程度行えば「変えて」当たる回数が「変えない」で当たる回数の2倍くらいになり、グループによっては「変える」確率が $2/3$ なのではないかという結論が推測されるだろうと思われる。その後各個人で、方法や自分の役割、結果についてワークシート（質問②）に記入させる。

○ グループごとに結果の検証を行い、結論を導く。

グループで実験の結果を検証し、どう行動する（「変える」か「変えない」か）方がよいかを考える。また、結果が正しかったかどうか、また正しかったとしたらどうすればそれを他のグループの人に納得してもらえるかを考え、その方法を説明する。そして各個人でそれを踏まえて結局自分ならどうするかをワークシート（質問③）に記入させる。問題が漠然としていて考えにくいと思われるので、「3つの箱をA、B、Cとして、あなたは箱Aを選び、このとき主催者が箱Bを開けました。つまり、箱Aのままなら「変えない」、箱Cにすれば「変える」ということ」というヒントを与える。手をつけられない生徒が多い場合は、更に適宜ヒントを与える。計算ができるかどうかではなく、どういう計算をすればいいか等を書かせることを重視する。

○ 計算の確認、及び感覚を結果に近づける。

ワークシートを採点・評価し、返却した時（次の時間）に、ループリックの説明などと同時に、確率を求めればよいということ、条件付確率が使えるということ、計算の方法などを説明する。

「変える」方の確率が2倍高いという結果に対して、感覚的になかなか納得できない生徒も多いだろう。そのため、箱を10個にした場合（主催者が選ばれなかった箱のうち外れの箱8個を開ける）で考えてみると、「変えた方が得だ！」という感覚になるだろうと考えられる。確率の有用性や、工夫して考えることで正確なことが分かるということを実感させ、日常の他の場面でも利用できるというであろう。

3 実践報告

(1) パフォーマンス課題の実施状況

1年3組の数学Aの分割授業（18名）1.5時間を使って行った。生徒たちは初めいつもの授業との違いに戸惑っているようだったが、グループ学習に入ってからはとても楽しそうに積極的に取り組んでいた。どのグループもコミュニケーションがとれ、活発な言語活動が行われており、グループごとに実験の仕方もさまざまだった。初めはただ「当たった」「外れた」と楽しんでいるだけだったが、実験を繰り返す中で、だんだん考えるようになり、「変える」「変えない」を交互に繰り返すグループや、何回かずつ「変える」「変えない」を行うことで、検証しようとするグループが出てきた。

右の（資料1）は実際の記録用紙の一部を載せたものである。上のグループは、お客役の人が毎回ランダム（本気で当てようとしている）にカードを引き、その結果をただ羅列していったものになっている。

一方、下のグループは一定回数「変える」「変えない」を行っているのが分かる。どちらのグループも最終的に「変えて」当たる回数が「変えない」で当たる回数の2倍にかなり近い結果になっていた。

ただ、「変えて」当たったときは、「変えない」で外れた訳だから、これを記録していくのが効率的だしよいことになる。しかし、実際にはこのことに気付いたグループはなく、どのグループも（資料1）の記録用紙のように「変えて」当たり、外れ、「変えない」で当たり、外れを4パターン記録していた。このことについては、大変残念だった。

また、ワークシートへの記入はどの生徒も真剣に一生懸命取り組んでいた。

当初はワークシートを採点・評価し、返却した時（次の時間）にやる予定であった箱10個の場合を最後に説明した。これにより感覚的に納得できた生徒が多かったようで、感想にもそのことが書いてあるものが多数あった。

(2) 評価結果について

質問②において、実験の方法等の説明と実験結果の説明・表現は一緒には評価できないことが分かったため、ループリックを別々に分けることにした。

資料1 実験の記録用紙

変えない	変えない	変える	変えない	変えない
0	X	X	0	0
変えない	変える	変えない	変える	変えない
X	0	0	X	X
変えない	変えない	変えない	変える	変える
X	X	X	X	0

1回目	変えない	2回目	
1	0	1	0
2	X	2	X
3	0	3	X
4	X	4	X
5	X	5	X
	$\frac{2}{5}$		$\frac{1}{5}$
			$\frac{3}{10}$
変える			
1	0	1	X
2	X	2	0
3	0	3	0
4	X	4	0
5	0	5	0
	$\frac{3}{5}$		$\frac{4}{5}$
			$\frac{7}{10}$

表 現			
	実験の方法等をきちんと説明できているか。		実験結果をきちんと説明・表現できているか。
5点	方法が具体的に文章で書かれている。	5点	結果が分かりやすく書かれている。または、推測（変える方が2倍）についても触れている。
3点	方法について書かれている。	3点	結果が数値を使って書かれている。
0点	やっていることを理解しておらず、説明できない。または説明におかしな点がある。	1点	結果は書かれているが、数値が書かれていない。
		0点	結果が書かれていない。

【質問①について】

5点	3点	2点	1点	0点
0人	9人	3人	6人	0人

3点だった生徒の解答は「変えても、変えなくても確率は $1/2$ だから」というものが多く、似たような内容でも数値が書かれていないものを2点とした。

次のものは3点をつけた解答である（資料2）。

資料2 実際の答案1

質問①
自分ならどうするかを書きなさい。なるべく根拠（そう考えた理由）を示すこと。

変えない

あたりもはずれも $\frac{1}{2}$ の確率だから。
たぶん

1点だったものには、資料3のように根拠になっていないものや、中には「変える」とだけ書いていたものもあった。予想よりも数値を使って、根拠を書いた生徒が多く、「確率」という言葉もよく使われていた。しかし、計算をしている解答（5点）はなかった。計算となるとなかなか難しいが、感覚的には確率というものを理解できているのだと思う。

資料3 実際の答案2

質問①
自分ならどうするかを書きなさい。なるべく根拠（そう考えた理由）を示すこと。

変えない

理由は一度決めたら変えたくないから

【質問②について】

実験の方法等の説明

5点	3点	0点
4人	14人	0人

実験の結果の説明

5点	3点	1点	0点
4人	10人	4人	0人

方法等の説明については、記述力や表現を見るところなので、文章で書かれているものを具体的に判断し5点とした。結果の説明については、行った回数や当たった回数などが書かれているものを3点以上とした。

次のものは5点をつけた解答である（資料4）。

資料4 実際の答案3

質問②
 実験について、方法やグループの中での自分の役割、結果を詳しく丁寧に説明してください。

変えるのと変えないのを川貝番にやってみて
 どちらの方が当たる確率が高いかをやってみた。

結果は変える→変えないの川貝をそれぞれ5回計10回やってみると
 変えるで当たった確率は $\frac{4}{5}$ 変えないで当たった確率は $\frac{2}{5}$ に当たった。(2倍)

次に変えない→変えるの川貝をそれぞれ7回計14回やってみると
 変えないで当たった確率 $\frac{7}{14}$ 、変えるで当たった確率 $\frac{5}{7}$ に当たった。
 2倍以上。

変えて当たった確率が、変えないで当たった確率の2倍になることが書かれている。

また、1点だったものには、(資料5)のように結果が詳しく分からないものが多かった。

資料5 実際の答案4

質問②
 実験について、方法やグループの中での自分の役割、結果を詳しく丁寧に説明してください。

選んだ
 変えないだとあたる確率は、低確率。
 変えるとあたる確率は、高確率。

【質問③について】

この質問は「変えない(箱Aのまま)、変えた(箱Cにした)ときの確率をそれぞれ計算してください」とすれば、質問の意味は分かりやすかったと思うが、「計算」をさせるのは厳しいと思い、説明させるだけにとどめた。その結果大変分かりにくい質問になってしまったと反省している。解答としては「実験が正しいかどうかを検証するには、箱A、箱Cを選んだときの(条件付き)確率を計算する。また、その結果確率の大きい方に行動すればいい」というような内容を期待した。生徒に取り組みませるときは、助言・説明もしたのだが、このような解答をした生徒はいなかった。したがって、全員が0～1点となってしまった。素直に「確率を計算してみましょう」とすれば書ける生徒がいたかもしれない。

(3) アンケート結果について

授業後に簡単なアンケートを実施し、本時の振り返りを行った。

1 課題内容は理解できましたか。				
理解できた	だいたい理解できた	あまり理解できなかった	理解できなかった	
10名	8名	0名	0名	
2 課題（授業）の難易度はあなたにとってどうでしたか。				
簡単だった	やや簡単だった	普通だった	やや難しかった	難しかった
0名	0名	3名	5名	10名
3 課題には意欲的に取り組むことができましたか。				
取り組めた	まあまあ取り組めた	あまり取り組めなかった	取り組めなかった	
13名	5名	0名	0名	
4 考える力（考えようとする力）が身についたと思いますか。				
そう思う	まあそう思う	あまり思わない	全く思わない	
1名	16名	1名	0名	

次は授業の感想等を自由記述で書かせた主なものである。

- ・ よく分かり、とても深かった。理解するのによく考えた。
- ・ 3個で考えると難しかったけど、10個で考えたら理解（納得）することができました。（似た内容10名）
- ・ 自分が感覚でそうだと思っても結果が違うこともあるから、これからはしっかり考えてみようと思いました。
- ・ 改めて数学のおもしろさを感じることができたと思います。
- ・ 楽しかったけど難しく、グループ内でも自分でもよく考えたと思います。
- ・ 「なるほど」と思えて楽しかったです。ちょっと難しいけど他にもそういう確率のものがあつたらやってみたいと思いました。
- ・ 最初はただの運だと思っていたけど、実験してみると数字として結果が出てきて、おもしろいと思った。
- ・ まさか変えた方が倍の確率だなんて思いませんでした。
- ・ いつもより頭を使って考える授業だったので、難しく感じました。
- ・ いつもは考えずに適当に当てたりするだけだったので、これからは少し考えたいと思います。個人で考えたり、班でコミュニケーションがとれたりしていたので、その辺りも良かったと思います。
- ・ 実験を踏まえて考えることはとても頭を使うけど、分かったときのおもしろさが多くあつても楽しかったです。

「考えてみよう」「よく考えた」「考える授業だった」「考えたいと思います」などが「考えた」という表現が多数あり、一生懸命考えて取り組んだ様子が分かる。このことについてはよかったのではないかと、パフォーマンス課題に取り組ませる意味があつたのではないかと思う。

(4) まとめ（研究の成果）と今後の課題

アンケート結果から課題内容が難しかったと答えた生徒が15名いるのに対し、課題内容は理解できたと答えた生徒が18名いた。「最初はあまり理解できなかったが、取り組むうちに少しずつ課題の内容が理解できた」と書いた生徒が複数おり、グループ学習が理解を助けたり、深めたりしたと思われる。これは言語活動が活発に行われた結果であると考ええる。

パフォーマンス課題に取り組ませるに当たり、課題の設定、特に生徒が多様な考えを書けるようにするにはどのような課題にすればよいか大変悩んだ。あまり課題の設定を細かくし過ぎると全員が同じ答えになってしまうのではないかと、漠然とした設問では何も書けなくなって白紙答案が増えてしまうのではないかと、などである。そこでまず考えたのは、とにかく生徒が興味をもって取り組める課題にするということであった。さらに、パフォーマンス課題を行う最大の目的である、関心・意欲・態度など定期考査では評価しにくい部分を評価できるようにしようと考え、計算を求めない課題とした。その結果、全員が「意欲的に取り組めた」「まあまあ意欲的に取り組めた」と答えており、成果があったと考える。当初は、白紙の答案が多く出るのではないかと心配したが、予想していたよりも一生懸命書こうとする生徒が多く、取組はとてもよいものであった。定期考査ではあまり点数が取れないような生徒でも、ある程度得点することができたのはよかった。しかし、説明がうまくできず、表現がおかしかったり、箇条書きや単語で書いたりする生徒もいた。本校ではふだんの問題演習やテストで途中の過程をきちんと記述できない生徒が多い。このようなパフォーマンス課題を定期的に行っていくことは、記述力を養うのに効果があると考ええる。

ループリックの作成については、どこまでできたら何点にするのか、どの項目の配点をどれくらいにするか、など大ざっぱに決めてしまい不十分な部分があった。先行研究にならって、ループリックの点数を5点、3点、1点とつけた。実際に評価を付けてみて感じたことは、点数化したり、各観点の点数を合計したりはしない方がよいのではないかとということである。各観点ごとの重みを考慮し、観点ごとの配点を変える方法をとるなら、合計をする意味があるが、今回の取組については、点数はつけず、項目ごとに何段階の何番目かを本人に知らせる方がよいのではないかと感じた。合計点がよかった、悪かったということで一喜一憂することは、パフォーマンス評価の目的に反する。どのような観点が今自分に足りないのか、どのような力を身に付ければよいのかを生徒自身が知ることが、このパフォーマンス評価の重要な目的である。次にループリックを作成するときには、このことを考慮して作成したい。

ループリックは、パフォーマンス課題の実施前に作成した。しかし、実際の生徒のワークシートを見ると、判断に迷うものが多数あり、評価の途中でループリックを修正しなければならなくなり、事前に作成することの難しさを実感した。ループリックを事前に作成することで、到達してほしいレベルが教員自身も明確になり、生徒がどこまで到達しているか、どのような観点が弱いのかを個々の生徒ごとに把握できる。それを実現するためには、より綿密なループリックの作成が必要である。

今回は、事前に生徒にループリックの提示をしなかった。理由は、解答が画一的になることを避けるためである。しかし、目標を明確にするという点では、事前に生徒にループリックを提示することも必要である。いずれにしても取り組ませ方や、評価の仕方、本人への知らせ方などまだまだ検討することは多い。

今後も、今回の反省を生かし、目指す生徒像を明確にして、どのような力が身に付いたか教員も生徒自身も把握できるパフォーマンス課題とループリックを作成し、より効果的な指導方法と評価方法を研究していきたい。

5 研究のまとめと今後の課題

以下に各研究協力委員の実践のまとめを示す。

- ・ 生徒が日常生活における事象について数学を用いて他人に説明する際には、数学的な表現と言語的な表現の両面が必要であり、どちらでつまづいているか確認することができた。
- ・ 数学の有用性を伝えることができ、数学を学ぶ意義を感じさせることができた。
- ・ 生徒に「考える」という場面を設定することができ、生徒だけでなく教員にとっても大変価値のある取組であった。
- ・ 予想していたよりも一生懸命取り組んでいる生徒が多かった。
- ・ 1回の取組だけではなく、パフォーマンス評価を繰り返し行っていくことが必要である。
- ・ 「課題学習」の指導法として、大変有効である。
- ・ ある単元をやり終えた後、日常生活の中でどのように活用できるか考えさせる場面を設定することは、数学への関心・意欲・態度を高めるのに意義がある。
- ・ パフォーマンス課題の作成、実施の流れ、ルーブリックの作成など、大変難しく、とても手間がかかる。
- ・ 評価する際に教員間で共有することが多くある。
- ・ 一つの答えを求める問題ではなく、議論を深めることができる課題作成について、教材研究をする必要がある。
- ・ 関心・意欲・態度や数学的な見方・考え方を評価するという点に関して、どのような取組が有効かを考え、継続的に行う必要がある。

6 おわりに

各単元のまとめとしてパフォーマンス課題に取り組ませることは、思考力・判断力・表現力を育成し、主体的に学習に取り組む意欲・態度を養う手だてになることが、本研究の実践で確認できた。特に、数学Ⅰ、数学Aにおける「課題学習」の取組として大変有効である。数学Ⅰ、数学Aに限らず、他の科目においても「課題学習」を設定し、取り組むことを提案したい。一方、この取組は、継続することで初めて効果が上がるものであるが、教材研究、授業の進め方の工夫、評価付けなど、多くの労力を必要とする。実現の可能性の高い評価方法の開発という点では、まだ不十分な部分が多く、さまざまな教育現場で活用できるように、今後、研究を継続していきたい。

※参考文献

田中耕治，よくわかる教育評価，ミネルヴァ書房，2005

松下佳代，パフォーマンス評価，日本標準，2007

三藤あさみ・西岡加名恵，パフォーマンス評価にどう取り組むか，日本標準，2010

G. ウィギンス/J. マクタイ，西岡加名恵訳，理解をもたらすカリキュラム設計，日本標準，2012