

「高等学校数学科における主体的・対話的で深い学びと評価に関する研究」 —未知の合成関数をつくってみよう—

1 はじめに

数学Ⅲでは、関数の分野を「分数関数」「無理関数」「逆関数と合成関数」と分けて学習する。今回、「逆関数と合成関数」でパフォーマンス課題を実施した。定義域、値域、逆関数、合成関数を学習した後、いろいろな合成関数をつくって関数に対する理解を深めさせたいと考えた。また教科書に載っている問題は解説を見て解くことができるが、『自分で合成関数をつくり、定義域や値域を求めグラフをかく』という問題に対して、どう考えて答えるかを研究したいと考えた。これから学習していく先で現れてくる未知の関数について、合成関数で考えることで、難しい関数も身近に感じさせたい。また、既習の内容を使って合成関数を積極的に探求させたい。

2 指導の計画と方法（指導上の工夫）

(1) 単元計画について

数学Ⅲにおける「分数関数」「無理関数」「逆関数と合成関数」の中の特に「逆関数と合成関数」は生徒が理解しづらいが、その後の学習でよく利用され、汎用性の高い内容である。本校ではあまり時間をかけずに学習する現状があるが、この箇所の理解を深めておくことでこれから現れる未知の関数に対応できるようになると考えた。まず、生徒自身でいろいろな合成関数を考え、その定義域や値域、逆関数などを求めるというパフォーマンス課題を考えた。自分で合成関数をつくらせる理由は、作成結果によってはその定義域や値域、逆関数を求められないこともあるからである。教科書や問題集に載っている関数は扱いやすくなっており、自分のつくった関数との違いに気付かせたいと考えた。また、ルーブリックは、二つの観点について評価できるものを作成した。

(2) （パフォーマンス課題の実施に向けての）授業での実践について

パフォーマンス課題をこの分野の最後のまとめと位置付け、分数関数、無理関数、逆関数を理解しているか確認しながら授業を進める。また、これまで習った関数（三角関数、指数関数、対数関数など）を幾つか挙げながら合成関数の説明をする。パフォーマンス課題を行う前の時間には、次の時間の予告として合成関数の練習問題を解かせ理解を深めておく。

(3) パフォーマンス課題の実践について（単元計画書及び資料5参照）

パフォーマンス課題は、2時間の設定で、次のような展開で行う（資料1）。

【資料1 パフォーマンス課題実施の展開】

1 時限目	活動内容	留意点
1 5分	・本時の学習のねらいと流れを聞く。 ・パフォーマンス課題のルーブリックについての説明を聞く。	具体的な流れをイメージさせるのと同時に、本時の意義を感じさせる。
2 20分	個人学習	できるだけ黙って待つ。
3 15分	集団協議（4, 5人のグループ）	できるだけ黙って待つ。

4	5分	まとめとして GRAPES（グラフ作成ソフト）の紹介を聞く。 次回の授業内容の説明を聞く。	各グループの関数を黒板に書かせ、紹介する。 GRAPES のインストールの仕方を説明する。
2時限目		活動内容	留意点
5	20分	GRAPES（グラフ作成ソフト）を用いた説明を聞く。	GRAPES で見せながらグラフの概形の解説や極限（次に学習する単元）などの話をし、次回の導入を踏まえたまとめとする。 グループごとに出てきた関数のグラフをGRAPES で確認する。
6	20分	アンケートに記入する。	周りとは相談せずにかかせる。

(4) 評価について（単元計画書及び資料5参照）

本実践のパフォーマンス課題は、簡単な合成関数を作成すれば、その後の定義域などを求めることは容易になり、逆に複雑な合成関数を作成すれば、その後の定義域などを求めることは、難しくなったり、求められなかったりする。今まで習った関数の知識をうまく使い、教科書に載っていないような未知の関数をつくることと、その後の定義域などを求めることもしっかりと取り組むことの両方を意識できるように、次の二つの観点について評価することとした。

「数学的な技能、知識・理解」を評価する観点1は、今まで習った関数をうまく活用して、合成関数を作成する技能についての評価をする。「数学的な見方や考え方」を評価する観点2は、未知の合成関数を作成できたかについての評価をする。また、観点2は、グループ協議での活動を評価する。積極的な話し合いを行いながら未知の合成関数を作成し、作成した合成関数について今まで扱ってきた関数との違いなど、気付いた点を挙げるのができたかを評価する。

パフォーマンス課題を実施する前に、ループリックの作成を行ってみたが、予想される生徒の作品（パフォーマンス）が想像しづらく、大変難しかった。

3 実践報告と考察

(1) （パフォーマンス課題に向けての）授業での実践について

最後のまとめであるパフォーマンス課題を意識して、この分野の授業ができたように思う。分数関数や無理関数を扱う場面では、定義域や値域などを意識的に質問したり、逆関数では、今まで習った1次関数、2次関数、三角関数、指数関数、対数関数などを扱い、逆関数がつくれるか確認したりした。

パフォーマンス課題を通して育成したい資質・能力を考えることで、生徒がその資質・能力を身に付けられているか確認しながら進めることができた。計画の段階で単元全体を通した目標を明確にしておくことはとても大切であると感じた。

(2) パフォーマンス課題の実践について

個人学習では、これまで習った関数を使って未知の合成関数をつくらうとする生徒が多かったが、ループリックを事前に提示して、逆関数までかけると評価が高いと伝えていたので、簡単でも定義域や値域、逆関数が求まるような合成関数をつくらうとする生徒が数人いた。また、合成関数を少しもつけれない生徒や、作成途中で手の止まっている生徒が数人いた。そのため、少し時間をおいて全体に教科書を参考にしてもよいと指示を出した。

グループでの協議では、個人学習より合成関数の創作活動が活発化し、どのグループも創意工夫を

凝らしていた。中には、一人が個人学習でつくっていた合成関数をそのままグループの関数としていたグループがあったが、今まで習った関数を複数用いて未知の合成関数をつくったグループがほとんどであった。ほぼ全てのグループが積極的な意見交換ができていたと思う。取組が消極的であった生徒の意見の中に「自分の作成した関数に自信がなく話し合いに参加できなかった」「合成関数というものを理解していなかった」「簡単な合成関数しかつくれなかった」とあり、コミュニケーション能力の低い生徒や引け目を感じてあまり話し合いに参加できなかった生徒が少数ではあるがいた。

グラフ作成ソフト GRAPES を使って、自分たちの作成した合成関数のグラフを見たときには歓声が起こった。何でそのようなグラフになるかを簡単に説明したり、次の単元である極限の話をしたりしてその授業を終えた。生徒の感想には家でグラフ作成ソフト GRAPES をインストールして、いろいろな関数のグラフをかいてみたいという感想もあった。

(3) 評価（と評価結果の生徒への還元）について

事前にある程度生徒の解答を予想してルーブリックを作成したつもりであったが、予想していない解答が出てきて、パフォーマンス評価実施後にルーブリックの変更をすることとなった。ルーブリックは、事前にあらゆる解答を予想することと、観点を絞り込んでもっと明確化するべきだということが分かった。

観点1では、「二つ以上の」という文言で一つしか合成関数をつくれなかった生徒の評価ができなかったので、「二つ以上の」という言葉は削除した。また、計算ミスで間違えるということもあるので、「定義域」「値域」「逆関数がかかる」を段階的にできると評価が上がっていくというルーブリックをつくるべきではなかった。定義域、値域、逆関数のうち幾つ求められているかでルーブリックを分ければよかった。作成した合成関数の中で複雑なものほど定義域や値域や逆関数を考えることが難しく、観点1の評価も未知の複雑な合成関数をつくった生徒ほど低くなってしまいう傾向があることが分かった。

観点2では、いろいろな事柄を組み合わせた結果、評価が煩雑になった。集団協議において、話し合いの中の気付いたことやメモをとる生徒はあまりいなかった。気付いたことを書いた生徒の中でも三つ以上書いた生徒はほとんどいなかった。このことから、ルーブリックを変更することとした。気付いたことを三つ以上書いていなくても未知の合成関数をつくっていたら評価を「5」（資料4にアンカー作品）、未知の合成関数がつくれていなくても気付いたことを何かしら書いてあり、協議に参加していると判断できたら評価を「3」、未知の合成関数がつくれていないし、気付いたことも書いていなかったら評価を「1」というように変更した。評価の内訳は以下のとおりであった（資料2）。

【資料2 評価結果】

観点1（数学的な技能、知識・理解）

5		4		3		2		1	
16人	40.0%	10人	25.0%	1人	2.5%	13人	32.5%	0人	0%

観点2（数学的な見方や考え方）

5		4		3		2		1	
30人	75.0%	0人	0%	1人	2.5%	0人	0%	9人	22.5%

(4) アンケートについて

パフォーマンス課題実施後に、アンケート（資料 6）を行い、その結果を以下に記す（資料 3）。

【資料 3 事後アンケートの結果】

I 個人学習の難易度について									
難しかった		やや難しかった		どちらともいえない		やや易しかった		易しかった	
5人	12.5%	14人	35.0%	14人	35.0%	5人	12.5%	2人	5.0%

II 個人学習中に考えていたことについて（複数回答可）		
簡単な二つの関数を組み合わせよう	13人	32.5%
みんなのつくらなさそうな合成関数をつくろう	16人	40.0%
合成関数というものがよく理解できていない	2人	5.0%
教科書にならって似た合成関数をつくろう	5人	12.5%
定義域、値域を求められるような合成関数をつくろう	9人	22.5%
その他	4人	10.0%

III 集団協議の参加姿勢について									
とても積極的		やや積極的		どちらともいえない		やや消極的		とても消極的	
1人	2.5%	16人	40.0%	10人	25.0%	10人	25.0%	3人	7.5%

IV この授業の中での活動を通して以下の三つの力がついたと思いますか。

判断力・表現力

とても身に付いた		やや身に付いた		どちらともいえない		あまり身に付かない		全く身に付かない	
5人	12.5%	20人	50.0%	14人	35.0%	1人	2.5%	0人	0%

創造力

とても身に付いた		やや身に付いた		どちらともいえない		あまり身に付かない		全く身に付かない	
6人	15.0%	27人	67.5%	7人	17.5%	0人	0%	0人	0%

分析力

とても身に付いた		やや身に付いた		どちらともいえない		あまり身に付かない		全く身に付かない	
5人	12.5%	20人	50.0%	13人	32.5%	2人	5.0%	0人	0%

パフォーマンス課題は、難しいと答えている生徒が約半数いるが、積極的に取り組めた生徒も同じくらいいた。また、判断力・表現力、創造力、分析力という身に付けてほしい力についても、半数以上の生徒が身に付いたと答えていた。

4 まとめ

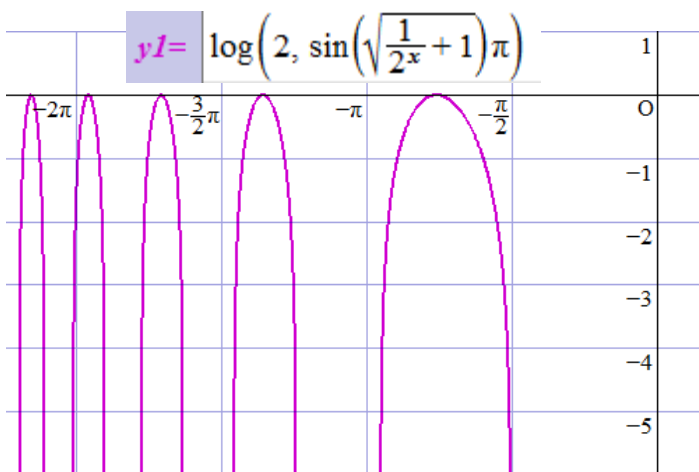
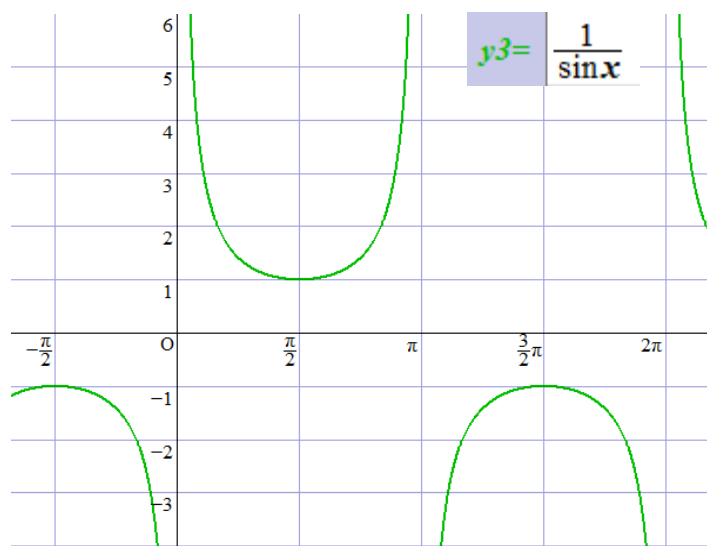
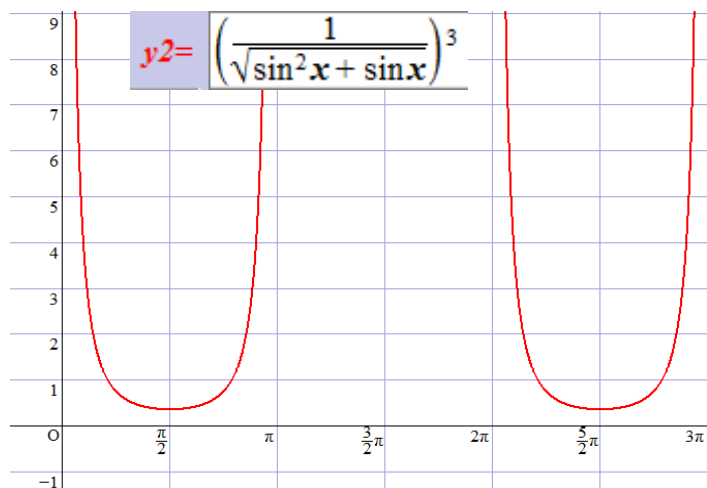
本実践では、この分野のまとめとしてのパフォーマンス課題の設定はよかったが、ルーブリックの設定が不適當なところがあった。だから、ルーブリックを確実に適応できるものにしていくことが今後の課題である。生徒の取組としては、個人学習から集団協議まで真剣に取り組んでいた。そして、個人学習でつくった未知の合成関数を持ち寄って集団で協議をするとまた新たに複雑な未知の合成関数をつくっていたのが印象的であった。アンケートの結果を見ると、パフォーマンス課題に取り組んだことをよいと感じている生徒が多かったことも分かった。今後も、このようなパフォーマンス課題を実施し、信頼性・妥当性のある評価ができるルーブリックの作成についての研究を進めていきたい。

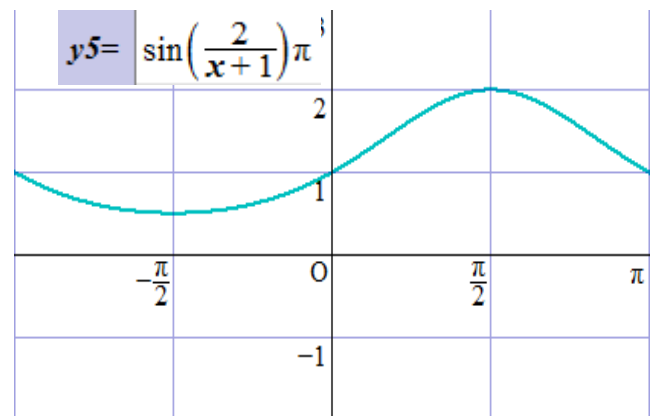
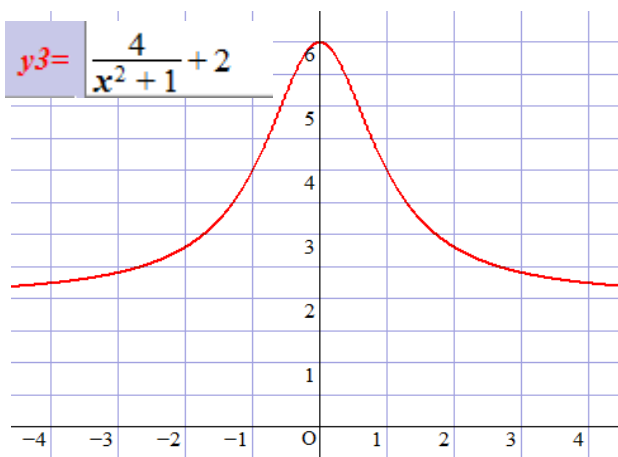
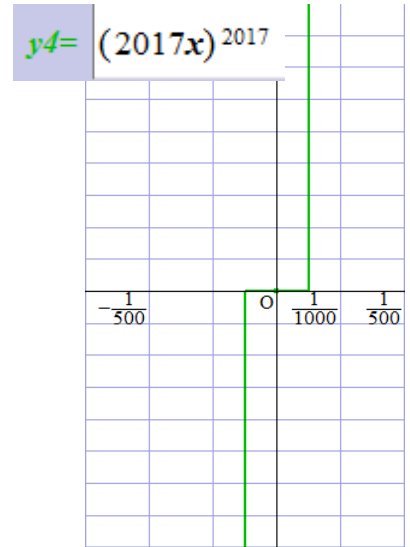
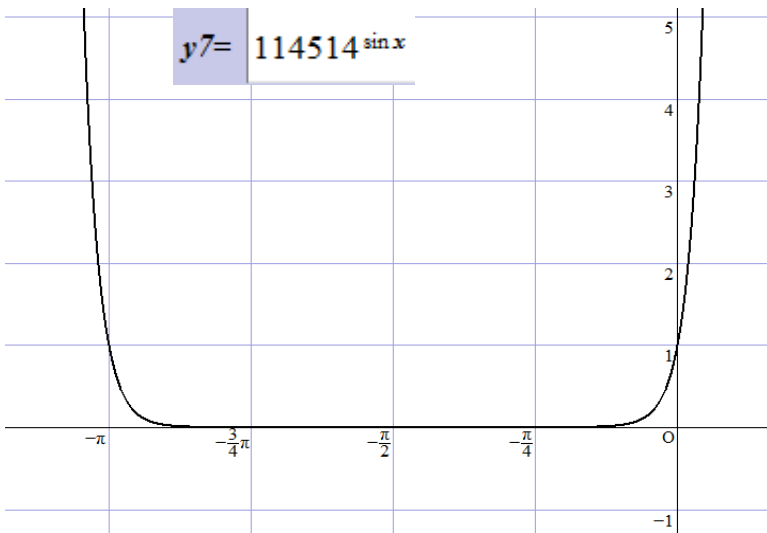
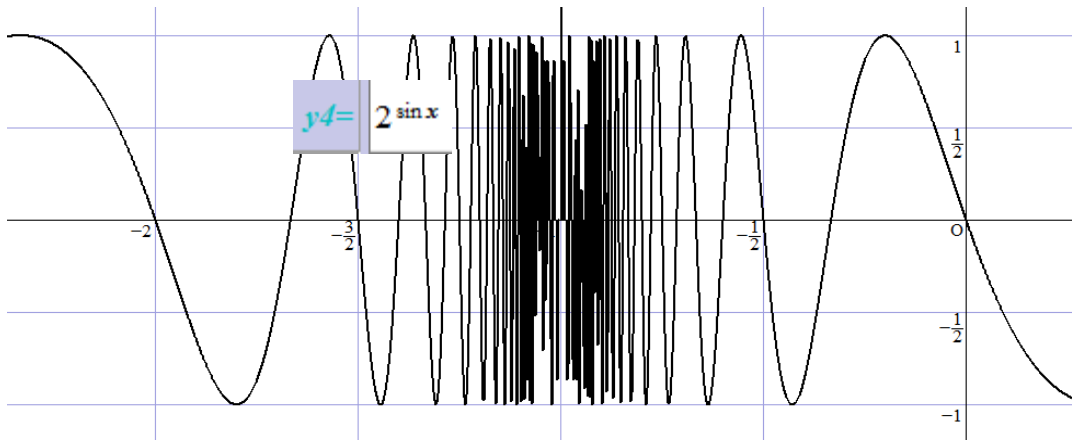
単元計画書

教科名(科目名)	数学Ⅲ (数学Ⅲα)	単位数	3
対象クラス	2年	教科担当者	
単元名	関数	単元の実施時期	10月中旬～10月下旬
単元目標 (学習指導要領)	<ul style="list-style-type: none"> ・分数関数, 無理関数や逆関数および合成関数の概念を理解させる。 ・無理関数のグラフの概形をかき, 無理不等式を解くのに, 直線の上下関係を利用できるようにさせる。 ・元の関数と逆関数の関係をグラフの位置関係を基に理解させる。 		
1	単元観 (単元における目指す生徒像)		
	<ul style="list-style-type: none"> ・関数を考える際, 定義域と値域を意識して問題に取り組むようになる。 ・まだ学習していない未知の関数についても逆関数や合成関数の考え方を使って, 探究していく。 ・未知のものへの探究心・好奇心を育てる。 		
2	単元到達目標		
	①関心・意欲・態度	②数学的な見方や考え方	③数学的な技能
	<ul style="list-style-type: none"> ・話し合いに積極的に参加している。 ・未知の関数を探究心, 好奇心をもって調べる。 	<ul style="list-style-type: none"> ・逆関数の意味とその求め方を理解している。 ・元の関数と逆関数の関係をグラフの位置関係とともに理解している。 	<ul style="list-style-type: none"> ・分数式を変形し値域を求めることができる。 ・分数関数と無理関数の定義域と値域を求めることができる。 ・分数不等式をグラフを利用して解ける。
	④知識・理解	<ul style="list-style-type: none"> ・合成関数の考え方を使っていろいろな関数を求めることができる。 	
3	パフォーマンス課題について		
	重点目標	身に付けさせたい知識・技能	
	<p>いろいろな複雑に見える関数も合成関数で説明できることを理解させる。未知の関数も自分でつくれることで, 身近な存在だと感じさせること。</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・既知の関数を活用すること ・合成関数のつくること ・定義域, 値域を求めること ・グラフをかくこと ・以上のことを行い, 未知の関数を創作し, 分析しようとする姿勢 	
	パフォーマンス課題の内容		指導方法・形態
	<p>(1) いろいろな合成関数をつくれ。</p> <p>(2) それらの定義域, 値域を求めよ。</p> <p>(3) それらのグラフをかけ。</p> <p>(4) それらの逆関数を求められるか。</p>		<ul style="list-style-type: none"> ①個人で考える。 ②グループごとに研究・協議させる。 ③作図ソフト GRAPES で, 出てきた関数のグラフを見る。グラフがかけなかった関数については, これからやっていくことを踏まえて解説する。 ④最後に今後, 微分・積分で出てくる実際の合成関数のグラフを GRAPES で見せる。

4	パフォーマンス課題のルーブリック							
	段階	観点1 (数学的な技能, 知識・理解)	段階	観点2 (数学的な見方や考え方)				
	5	二つ以上の合成関数をつくり, それらの定義域, 値域を求め, グラフをかき, 逆関数のグラフがかけた。	5	今までの教科書に載っていないグラフの合成関数をつくり, 他の人の関数を協議し, 気付いたことを三つ以上書けた。				
	4	二つ以上の合成関数をつくり, それらの定義域, 値域を求め, グラフがかけた。	4	グループ協議で, 積極的に話し合い, 気付いたことを三つ以上書けた。				
	3	二つ以上の合成関数をつくり, それらの定義域, 値域を求められた。	3	グループ協議で, 気付いたことを三つ以上書けた。				
	2	二つ以上の合成関数をつくった。	1	教科書の例や問題に載っているような型の合成関数である。				
1	一つも合成関数をつくることできない。							
5	育成したい能力 (キャリア教育の観点から)							
	判断力・表現力	自分がつくった合成関数のグラフをかくことができる力						
	創造力	何もないところから合成関数というキーワードを基に, いろいろな関数を合成し, 創り出すことができる力						
	分析力	定義域, 値域などを調べ, グラフをかくために必要となるものを調べることができる力						
6	授業計画			評価計画				
	時数	小単元	主な学習内容・活動	①	②	③	④	評価方法
	2	分数関数	<ul style="list-style-type: none"> 分数関数のグラフをかき, 定義域, 値域を求める。 分数方程式, 分数不等式を解く。 		○	○		観察
	2	無理関数	<ul style="list-style-type: none"> 無理関数のグラフをかき, 定義域, 値域を求める。 無理方程式, 無理不等式を解く。 			○	○	観察
	2	逆関数		○	○			観察
	1	合成関数		○			○	観察 ノート点検
	1	関数のまとめ (パフォーマンス課題)	<ul style="list-style-type: none"> いろいろな (直線, 放物線, 円, 三角, 指数, 対数) 関数の定義域と値域を考え, グラフにかく (グループ)。 今まで習った関数を合成関数で組み合わせていろいろな関数をつくる (グループ)。その中でグラフにかけるものはかかせる。 		○	○	○	観察 ノート点検 レポート
		定期考査				○	○	

【資料4 観点2で評価「5」をつけた合成関数の例】





1 (1) いろいろな関数を組み合わせて、合成関数をつつくれ。

I ねらい

複雑に見える関数も、これまで学んだ関数を使えば、合成関数で理解することができる。そういう見たことのない独自の関数をつくり、調べることによって関数における理解を深める。

II 方法

大問の中の(1)～(4)に答える。その際、(3)、(4)は簡単に求まらないこともあるが、そのときはなぜ求まらないか考えてみよう。

まず、これまで学んだ関数を思い出し出してみよう。

問1 関数の種類を書き出せ。

例 1 次関数

(4) (1) できつついた合成関数の逆関数を求められるか。

2 (1) いろいろな関数を組み合わせて、合成関数を一つつくれ。

(2) (1) でつくった合成関数の定義域、値域を求めよ。

(3) (1) でつくった合成関数のグラフをかけ。

3 (1) いろいろな関数を組み合わせて、合成関数を一つつくれ。

(2) (1) でつくった合成関数の定義域、値域を求めよ。

(3) (1) でつくった合成関数のグラフをかけ。

(4) (1) でつくった合成関数の逆関数を求められるか。

(4) (1) でつくった合成関数の逆関数を求められるか。

パフォーマンス課題Ⅱ (集団協議)

○合成関数を発表しよう。

メモ (友達の発表をメモしよう)

○個人の発表を参考にしながら、グループで話し合い、独自の関数を作成しよう。

話し合ったことをメモしよう。

○完成した合成関数について定義域、値域、グラフ、アピールポイントを記入しよう。

合成した関数	
定義域、値域	値域
グラフ	
アピール ポイント	

○本日の感想

パフォーマンス課題のルーブリック		
段階	観点1 (数学的な技能, 知識・理解)	観点2 (数学的な見方や考え方)
5	二つ以上の合成関数をつくり, それらの定義域, 値域を求め, グラフをかき, 逆関数のグラフがかけた。	今までの教科書に載っていないグラフの合成関数をつくり, 他人の関数を協議し, 気付いたことを三つ以上書けた。
4	二つ以上の合成関数をつくり, それらの定義域, 値域を求め, グラフがかけた。	グループ協議で, 積極的に話し合い, 気付いたことを三つ以上書けた。
3	二つ以上の合成関数をつくり, それらの定義域, 値域を求められた。	グループ協議で, 気付いたことを三つ以上書けた。
2	二つ以上の合成関数をつくられた。	教科書の例や問題に載っているような合成関数である。
1	一つも合成関数をつくることができない。	

パフォーマンス課題の評価

観点1

観点2

2年 組 番 氏名

