

「高等学校数学科における主体的・対話的で深い学びと評価に関する研究」

— 紙を折ってみよう —

1 はじめに

数学Ⅱの単元である「指数関数・対数関数」は、他の単元に比べて扱う内容はあまり多くない。しかし、実社会でさまざまな現象に現れたり、いろいろな場面で利用されたりしており重要度は高い。また、計算方法が独特であるため、どうしても計算することだけに必死になってしまい、活用するところまでできていない。本校では元々「関数」を苦手とする生徒が多い（そもそも「関数」「グラフ」の意味を理解できていない生徒が多い）ので、「関数」については、グラフの形を覚えるだけになってしまっている。そこで、身近な話題を考える中で、「関数」のグラフの形の表している意味を理解し、「指数関数的増加」を実感させることを目指したい。

2 指導の計画と方法（指導上の工夫）

(1) 単元計画について

第一の目標として、指数・対数の計算が確実にできるようにする。そのため、計算問題の小テストを多く実施し、基礎・基本となる知識・技能を定着させる。第二の目標として指数関数・対数関数の有用性・必要性を感じ、二つの関数が密接な関係にあることを実感させられるようにする。パフォーマンス課題の内容は、特に第二の目標を達成できるように設定した。

(2) (パフォーマンス課題の実施に向けての) 授業の実践について

単元計画を立てるときにも重要視した点であるが、確実に計算をできるようにするために、計算問題の小テストを多く実施する。そして、指数関数と対数関数の対比を常に行いながら、対数関数の学習中に指数関数との密接な関係性を認識できるように心がけて指導する。また、指数関数・対数関数に関する身近な話題を話しながら、その有用性・必要性を感じさせることでパフォーマンス課題につなげる。最終的には身近な問題や課題及び事象に対して数学を活用して解決したり、自らの考えを述べたりすることができる生徒を育てたいと考える。

(3) パフォーマンス課題の実践について（単元計画書及び資料6参照）

本校の生徒は粘り強く考え、解決することを苦手とする生徒が多いので、日頃は自分でじっくりと考えることが大切であると指導している。グループで取り組む場面は学校祭のクラス企画など授業以外では多くあり、協力して取り組んでいるが、授業中のグループでの取組はなかなかうまくいっていない。これは、数学に自信がないのでグループで発言することができなかつたり、実際にやろうと思ってもできなかつたりすることが原因であると思われる。そのような状況を考え、パフォーマンス課題は、基礎・基本の知識・技能をきちんと身に付けた後に実施し、考え方を重視できるよう複雑な計算の場面で戸惑わないように配慮し、積極的に自分の考えが言えるような助言を心がける。また、事前の授業中に何度かグループでの活動を取り入れて、慣れさせておく。

(4) 評価（ルーブリック）について（単元計画書参照）

計算部分の評価だけにしてしまうと、苦手な生徒は全くできずに終わってしまうということを考え、計算だけでなく言葉による表現の部分も評価対象とした。昨年グループでの取組を評価した際に、グループ全員が同じ評価になってしまうことを懸念したが、グループで相談して一つの結論を得ることを評価してもよいのではないかと考え、グループでの取組の問③を一つ目の評価対象とした。また、個人の評価もするために、個人での取組の問⑤を二つ目の評価対象とし、学習してきた指数関数の特

徴を実感できているか、きちんと捉えられたかを評価することとした。

3 実践報告と考察

(1) (パフォーマンス課題に向けての) 授業の実践について

「指数の計算」、「指数方程式・不等式」、「対数の計算」、「対数方程式・不等式」の内容でそれぞれ3回ずつ小テストを行い、基礎・基本の知識・技能の定着を図った。また、対数関数と指数関数の対比を常に意識しながら、授業を行うことができたと思う。ただ、授業時間の問題もあり、身近な話題に触れる機会をあまりつくることができなかつたのが反省点である。パフォーマンス課題につなげるため、桁数を求める問題のときは「桁数を求める(桁数が分かる)ということはおよその大きさが分かるということだ」ということを強調した。また、ふだんは黙々と問題に取り組む雰囲気の中で授業を行っているので、問題を解いているときや、発問のときに「周りと相談していいよ」という声掛けを積極的に行い、周りや相談できる雰囲気づくりに努めた。

(2) パフォーマンス課題の実践について

指数・対数関数の内容が全て終了した最後の時間にパフォーマンス課題を実施した。まず、問①の直感で答える問題と問②の具体的に紙を折ったときの厚さを答える問題を個人で取り組ませた。問①に関しては、30回と意外に小さい回数を答えた生徒もいたが、大半は大きな回数を答えていた。中には37,760,000回と答えた生徒もいた。問②は問③に取り組むための布石であったこともあり、問③をやる前に問①、問②の答えを全体に示した。「厚さはどれだけでしょう?」と単位を指定しておかなかったため、個々の生徒の解答を確認したところ、102.4mmというミリメートルで答えた生徒が多かった。そこで、机間指導しながら「それ(102.4mm)はどれくらいの厚さ?」と個々に聞いたところ、約1cmと答えた生徒が結構いた(実際は約10cm)。また、質問されてからようやく102.4mmという長さの意味を考え始め、10cm程度の長さであることを認識した生徒も多かった(センチメートルの方が馴染みが深い)。ふだんから計算した結果を考察したり、その意味を考えたりしていないのだと改めて感じた。

次に、6~7人のグループをつくり、問③の紙を何回折ったら富士山の高さに達するかという問題と問④の問①の直感で答えた回数だけ紙を折ったら厚さはどれくらいになるかという問題を取り組ませた。なお、常用対数表も各グループに1枚ずつ配付した。最初は2をかけ続けていた生徒が多かったが、常用対数表を配っておいたことがヒントになり、だんだんと対数の知識で何とかしようという生徒が増えてきた。問④は桁数の問題で、数日前に習ったばかりであったが、正確に計算して桁数が出せていたのは2名しかいなかった。なるべく複雑な計算にならないようにしたつもりであったが、やはり、計算でつまづく生徒が多かった。最後に個人で問⑤の「結果から分かる指数関数の特徴」を考えさせる問題に取り組ませた。

(3) 評価結果について

観点1 問③のループリックについて、「計算した形跡はあるが、答えまでたどり着いていない」を2点としていた。これは地道に掛け続けて計算ミスをするなど、ある程度方向性のある計算がされていることが前提だったが、思ったよりも意味の分からないおかしな計算がされている答案が多かった。また、全員が計算に必死で、とても言葉による説明をする余裕がなく、段階5に到達する生徒がいなかったこともあり、ループリックの観点1の文言を次のように変更した(資料1)。

【資料1 ルーブリックの観点1の変更】

段階	観点1 (問③指数不等式を立て論理的に求めているか)
5	指数不等式を立てて、正解を導いている。さらに、言葉による説明などがあり、分かりやすく書かれている。
4	指数不等式を立てて、正解を導いている。
3	地道に2をかけ続けて求めている。正解を導いている。指数不等式を立てることはできたが、正解を導けていない。
2	計算した記述はあるが、答えまでたどり着いていない。
1	何も書かれていない。

→

段階	観点1 (問③指数不等式を立て論理的に求めているか)
5	指数不等式を立てて、正解を導いている。
4	地道に2をかけ続けて求めている。正解を導いている。指数不等式を立てることはできたが、正解を導けていない。
3	計算はしているが、答えまでたどり着いていない。
2	何かしようとした記述は見られるが、意味の分からない計算である。
1	何も書かれていない。

以下が評価結果である(資料2)。

【資料2 観点1問③について】

段階	5点	4点	3点	2点	1点
人数	2人	16人	5人	11人	2人

模範解答は、不等式 $2^n \times 0.1 > 3776000$ を立て、両辺に常用対数を取り、対数不等式を解く方法である。このように右辺が x^n の形にならない方程式・不等式を解くことは、事前の授業では扱っていない。本校の生徒にとっては、かなりの発展内容であるが、常用対数表をヒントに、指数関数と対数関数の既習事項をうまく活用して、考えてくれることを期待した。

観点1の評価を5点とした2名について、1名は不等式を立式することはできたが、不等式を解くことができず、 n に次々と値を代入する方法で解いて結論までたどり着いていた。もう1名は不等式でなく $2^n \times 0.1 = 3776000$ という方程式を立式していたが、その後の解法が完璧であったので5点とした(資料3)。

【資料3 問③の解答例(生徒のワークシートを基に作成)】

問③ 富士山の高さに達するには何回折ればよいか求めなさい。どのように求めたか分かるように式、言葉などを使い分かりやすく書いてください。

3776 m を mm に直すと $377600 \text{ cm} = 3776000 \text{ mm}$

$2^0 \times 0.1 = \text{答え}$ だから答えのところに 3776000 を入れる。

$2^x \times 0.1 = 3776000$

$2^x = 37760000$

常用対数をとる

$\log_{10} 2^x = \log_{10} 37760000$

$x \log_{10} 2 = \log_{10} 3.776 \times 10^7$

$x \log_{10} 2 = \log_{10} 3.78 + \log_{10} 10^7$

$0.3010x = 0.5775 + 7$

$0.3010x = 7.5775$

$x = 25.13 \dots$ よって 26回

他にも方程式を立てた生徒は何人かいたが、単位を mm に変換するとき間違えていたり、3776000 を素因数分解して解こうとしたりしていた生徒が何人かいた。こういう場面で、直接習ったことがなくても、今までの既習事項を活用して解決していく思考力をもっと付けさせていかなければならないと強く感じた。また、4 点を付けた生徒のほとんどは次々と 2 を掛けていく方法で求めたものである。中に 1 人だけ $2^{10}=1024$ を利用して、 2^{20} を求めて計算を短縮していたものがあった。3 点の解答は 2 をかけていく途中で計算を間違えたり、やはり単位を mm に変換するとき桁を間違え、22 回で到達してしまったりした解答である。2 点の解答は何が書いてあるか分からなかったり、対数の使い方がおかしかったりというものであった。また、1 点の解答は取り組んでいなかったのではなく、悩んだ結果書くことができなかったものである。

【資料 4 観点 2 問⑤について】

段階	A	B	C
人数	0 人	5 人	31 人

問⑤は、感想と特徴の二つを書かせたが、特徴の記述内容で評価した（資料 4）。「指数関数の特徴をなるべく詳しく述べなさい」という質問の意味をあまり理解できておらず、「大きい数には対数が使えると分かった（指数関数の特徴ではない）」とか「2 倍ずつ増えていくと分かった（今回の事例のみの特徴）」など指数関数の特徴を書いていない記述は評価を C とした。多くの生徒の記述内容がこれに該当した。「急に大きくなる」「増加する幅がだんだん大きくなる」「意外とすぐに大きくなる」などやや表現が数学的でなかったり、論拠を示していなかったりするものもあったが、「大きくなる」ということが感じられる表現が書かれているものは B とした。

(4) 評価結果の生徒への還元について

評価結果を示したワークシートを返却したときに問③から問⑤までの解説をした。問③について、生徒は十分悩んで考えた後だったからか、難しい問題だけどできるようにしようという雰囲気かふだんより感じられた。また、答えが出ていなかった生徒からは、26 回で富士山の高さに到達することに驚きの声が出ていた。指数関数の特徴である、「初めのうちは大して増えないが、後半急激に大きくなっていく」という特徴を理解した生徒がいることが分かる。

問④については 100 回で計算した例（答えはキロメートルで表すと 25 桁になる）を紹介し、どれくらい大きい数かの比較として 1 万光年が 17 桁 km であるという話をした。生徒はとても驚いており、指数関数の増え方のすごさを感じてくれたと思う。問⑤は指数関数のグラフを描いてその特徴について説明した。指数関数のグラフを形だけ一生懸命覚えていた生徒が多かったようで、なぜそのようなグラフになるかという意味が理解できたようであった。

(5) アンケート結果について

授業後に簡単なアンケートを実施し、本時の振り返りを行った。以下に示すのが、そのアンケート結果である（資料 5）。

【資料 5 事後アンケートの結果】

1 課題（授業）の難易度はあなたにとってどうでしたか。

難しかった	やや難しかった	普通だった	やや易しかった	易しかった
66.7%	33.3%	0.0%	0.0%	0.0%

2 課題には意欲的に取り組むことができましたか。

取り組めた	まあまあ取り組めた	あまり取り組めなかった	取り組めなかった
55.6%	36.1%	8.3%	0.0%

3 グループでの活動への参加度を教えてください。

積極的に参加した	まあまあ参加した	あまり参加できなかった	全く参加できなかった
16.7%	69.4%	13.9%	0.0%

4 今回の授業及び課題に取り組むことは、以下の力を身に付けることに有効だと思いますか。

① 問題解決力（既習事項の中から何を活用すればよいかを判断し、問題を解決していく力）

そう思う	まあそう思う	あまり思わない	全く思わない
48.6%	48.6%	2.8%	0.0%

② 論理的思考力（課題に対して論理的に考え、解決しようとする力）

そう思う	まあそう思う	あまり思わない	全く思わない
37.1%	60.0%	2.9%	0.0%

③ 仲間と協力する力（グループの人たちと役割分担したり、相手の意見を聞いたり、自分の意見を伝えるなど協力して、問題に取り組む力）

そう思う	まあそう思う	あまり思わない	全く思わない
51.4%	40.0%	8.6%	0.0%

5 今日の授業の感想を教えてください。

とてもよかった	よかった	あまりよくなかった	全然よくなかった
31.4%	65.7%	2.9%	0.0%
今後も続けて実施してほしい	たまに実施してほしい	あまり実施してほしくない	実施してほしくない
34.2%	62.9%	2.9%	0.0%

【授業の感想】（主なもの）表現上加筆した部分があります。

- ・ 日常のことで数学（対数）が使えるんだなと思いました。
- ・ 富士山の高さまで折るのに思っていた回数よりもかなり少なくてびっくりした。（14名）
- ・ これが問題集にあれば勉強が楽しくなると思った。覚えたことを使って自分で答えが出せたときは嬉しかった。
- ・ \log （対数）を使う機会はこういう時だと分かりました。
- ・ 富士山で 26 回なら東京スカイツリーとか東京タワーはどれくらいで達するのか計算してみたいと思いました。
- ・ 自分でじっくり考えて答えを導く努力をすることも大切だと思いました。
- ・ 友達同士で話し合いながらだと自分にはなかった発想に気付いていいなと思いました。（2名）
- ・ 理解できていない部分、理解できている部分とかがよく分かりました。
- ・ すごく考えさせられた授業だった
- ・ \log （対数）は大きい数を計算するのにとても便利だと思った。
- ・ こういう問題はあまり向いてないと分かった。
- ・ 思考力が大事だと分かった。またやりたいと思った。

4 まとめ

ふだんの授業で小テストを行い、基礎・基本となる知識・技能を身に付けた上でパフォーマンス課題に臨んだつもりであったが、思ったよりもできなかったというのが今回の感想である。単元の目指すべき生徒像に示したが、「教科書や問題集などにはない問題（身近な問題や課題及び事象）に数学を活用して解決するのが苦手」であることを再認識させられた。既習事項を柔軟に活用したり、他分野の内容との関連を見つけたりするのは一人では難しいと思い、グループでの学習にしたが、グループで協力してもできなかったのは残念であった。

パフォーマンス課題に取り組みはじめて3年目になるが、毎年実感するのは、生徒にとって「難しいがまたやってみたい」という感想が多いことである。アンケートでも今後このような問題を「実施してほしい」「たまに実施してほしい」と答えた生徒合わせて97.2%と高い割合であった。ふだんの計算問題などの演習では、答えが求められないとすぐ答えを見てただ写すだけになってしまう生徒が、何とかしようと頑張っており姿が多く見られた。身近な問題を取り上げたことで、生徒の関心・意欲が高まることを実感した。また、「思考力が大事だと分かった」というように考えることの大切さに気付いた感想もあり、一定の成果があったと思う。また「こういう問題はあまり向いてないと分かった」というのもあり、教科書や問題集にないような問題はやったことがなく、手の付け方が分からず苦手な生徒もいたようである。

グループでの活動については、グループ内で意見を出し合い、よりよい解答を導いていくことはあまり得意でない生徒が多く、黙々と取り組んだり、話しているがまとまらなかったり、議論が進んでいかなかったりするグループがあった。これは上手く助言ができていない教員側の問題もあると思うが、あまり自信がなく自分の意見を強く言えない本校の生徒の特徴でもあると思う。もっとこのような機会を増やしていかないといけないと毎回のことながら強く感じた。

これからもパフォーマンス課題やアクティブ・ラーニング、そしてその評価について研究し実践していきたいと思う。

単元計画書

教科名(科目名)	数学(数学Ⅱ)	単位数	4単位
対象クラス	2年	教科担当者	
単元名	指数関数と対数関数	単元の実施時期	10月上旬～11月上旬
単元目標 (学習指導要領)	指数関数及び対数関数について理解し、関数についての理解を深め、それらを具体的な事象の考察に活用できるようにする。		
1	生徒の実態と単元観(単元における目指す生徒像)		
	<p>小テストなどを通して、基本的な計算力は身に付いているが、教科書や問題集などにはない問題(身近な問題や課題及び事象)に数学を活用して解決したり、自らの考えを述べたりすることができる生徒は少ない。貯金の複利や、遺跡の年代測定など指数関数が利用される場面は多い。特に「指数関数的増加」を実感し、そのすごさを知ってほしい。また、生徒には苦手でなかなか理解されない対数も、星の明るさや地震の規模など身近なものに利用されている。ただ計算だけでなく、身近な問題から興味・関心を引き出し、有用性・必要性を感じ、積極的に学ぶ姿勢を育てたい。</p>		
2	評価規準		
	①関心・意欲・態度	②数学的な見方や考え方	③数学的な技能
	指数・対数に関心をもつとともに、数学のよさを認識し、それらを事象の考察に活用しようとする。	事象を数学的に考察し表現したり、思考の過程を振り返り多面的・発展的に考えたりすることを通して、数学的な見方や考え方を身に付ける。	指数・対数において、事象を数学的に表現・処理する仕方や推論の方法などの技能を身に付け、問題を解決する。
	④知識・理解		
	指数・対数における基本的な概念、原理・法則などを理解し、知識を身に付けている。		
3	パフォーマンス課題について		
	重点目標	身に付けさせたい知識・技能	
	<ul style="list-style-type: none"> ・急激に増える「指数関数的増加」を実感させ、指数関数のグラフの意味を理解させる。 ・大きな数を扱うときは、対数の利用が有効であることを理解させる。 	数学的に考察し、式や言葉を用いて、論理的に他者に分かりやすく説明できる。また、課題を通して指数関数の特徴を理解する。	
	パフォーマンス課題の内容		指導方法・形態
	<p>【課題】 今ここにとても大きな紙があります。この紙を半分、また半分・・・と折っていきます。紙の厚さを 0.1mm とし、次の各問いに答えよ。</p> <p>問① 厚さが富士山の高さ 3,776 m に達するには何回折ればよいと思いますか？ 直感で教えてください。</p> <p>問② 10回折ったときの枚数と厚さはどれだけのしょう。</p> <p>問③ 富士山の高さに達するには何回折ればよいか求めなさい。どのように求めたか分かるように式、言葉などを使い分かりやすく書いてください。</p> <p>問④ グループの中で、質問①の回数が最も多かった人の回数折ったら、厚さはおよそ何 km (何桁) になるか計算しなさい。 $\log_{10}2=0.3010$ を用いてよい。</p> <p>問⑤ どうでしたか？結果に対する感想を書いてください。また、この結果から分かる指数関数の特徴なるべく詳しく述べなさい。</p>		問①…個人での取組 問②…個人での取組 問③…グループでの取組 問④…グループでの取組 問⑤…個人での取組

4	パフォーマンス課題のルーブリック							
	段階	観点1 (問③)指数不等式を立て論理的に求めているか)			段階	観点2 (問⑤)指数関数の特徴をつかめたか)		
	5	指数不等式を立てて、正解を導いている。さらに、言葉による説明などがあり、分かりやすく書かれている。			A	「初めのうちは大して増えないが、後半急激に大きくなっていく」ことが書かれている。		
	4	指数不等式を立てて、正解を導いている。			B	「後半急激に大きくなっていく」ことだけが書かれている。		
	3	地道に2をかけ続けて求めている。正解を導いている。指数不等式を立てることはできたが、正解を導けていない。			C	考察がされていない。		
	2	計算した記述はあるが、答えまでたどり着いていない。						
	1	何も書かれていない。						
5	育成したい資質・能力（キャリア教育の観点から）							
	問題解決力		既習事項の中から何を活用すればよいかを判断し、問題を解決していく力					
	論理的思考力		課題に対して論理的に考え、解決しようとする力					
	仲間と協力する力		グループの人たちと役割分担したり、相手の意見を聞いたり、自分の意見を伝えるなど協力して、問題に取り組む力					
6	授業計画			評価計画				
	時数	小単元	主な学習内容・活動	①	②	③	④	評価の方法等
	3	指数の拡張	累乗の意味を確認し、指数を実数全体に拡張する。その過程で、累乗根を導入する。			○	○	観察 小テスト
	3	指数関数	指数関数を定義し、諸性質を調べる。また、指数方程式・不等式を解く。		○			観察
	3	対数とその性質	対数を指数関数を用いて定義し、その基本性質を理解する。				○	観察 小テスト
	4	対数関数	対数関数を指数関数と対比させながら、その諸性質を調べる。		○			観察 授業プリント
	3	常用対数	常用対数を導入し、その応用例として桁数に関する問題を解く。			○	○	観察 小テスト
	1	定期考査	既習事項が身に付いているかを確認する。		○	○	○	考査
	1	パフォーマンス課題	課題に対し既習事項を活用し、その考察を通して、理解を深める。	○	○	○		プリント 振り返りシート

指数関数・対数関数

～紙を折ってみよう～

まずは約束事です。

この1時間は個人で考えたり、グループで協力したりしながら、課題に取り組んでください。

- あなたがどのような考え方をしたのか、その考え方を評価します。
- 式、言葉、図、絵などを使って、分かりやすく書いてください。
- 正しい答えが出せなくても、考え方がきちんと書けていれば、点数がもらえます。しかし、答えが正しくても考え方を書いていないければ、点数はもらえません。
- 途中で分かからないときでも、自分が考えたところまで書いてください。

では課題です。

【課題】

今ここにとても大きな紙があります。この紙を半分、また半分・・・と折っていきます。紙の厚さを0.1mmとして、次の各問に答えよ。

問①

厚さが富士山の高さ（ ）mに達するには何回折ればよいと思いますか？ 直感で答えてください。

回

問②

10回折ったときの厚さはどれだけでしょう。

2年 組 番 氏名

問③

富士山の高さに達するには何回折ればよいか求めなさい。どのように求めたか分かるように式、言葉などを使い分かりやすく書いてください。

問④

グループの中で、**質問①**の回数が最も多かった人の回数折ったら、厚さはおよそ何 km（何桁）になるか計算しなさい。 $\log_{10} 2 = 0.3010$ を用いてよい。

最も回数が多かった人の回数は

回

【計算】

